



GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT  
GÖTTINGEN

Masterarbeit

# Numerische Untersuchung des Wirbelplatzens in kompressiblen Unterschallströmungen

## Numerical Investigation of Vortex Breakdown in Compressible Sub-sonic Flows

angefertigt von

**Dominik Anton Suchla**

aus Braunschweig

am Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des DLR

Bearbeitungszeit: 20.01.2021 – 20.07.2021

Betreuer und Erstgutachter: Prof. Dr. Martin Rein

Zweitgutachter: Prof. Dr. Andreas Dillmann

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Nomenklatur</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Erläuterung einiger Grundbegriffe</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Aktueller Stand der Forschung</b>	<b>9</b>
4.1	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	9
4.2	Theoretische Beschreibung . . . . .	10
4.3	Numerische Untersuchungen . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Theoretische Grundlagen dieser Arbeit</b>	<b>14</b>
5.1	Definition der Geometrie . . . . .	14
5.2	Definition der Randbedingungen . . . . .	16
5.3	Berechnung von Mehr-Wirbel-Systemen . . . . .	18
5.4	Theoretische Berechnung von Swirl-Raten . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Numerische Simulationen mit dem TAU-Code</b>	<b>22</b>
6.1	Finite Volumen . . . . .	22
6.2	Gittererstellung und Auflösung . . . . .	23
6.3	Anfangsbedingungen . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Analyse der numerischen Ergebnisse</b>	<b>26</b>
7.1	Reproduktion experimenteller Beobachtungen . . . . .	27
7.2	Numerische Analyse der Stabilität einzelner Wirbel . . . . .	32
7.3	Vergleich der theoretischen Überlegungen mit Simulationsergebnissen . . . . .	36
7.4	Untersuchung der Interaktion zweier Wirbel . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>49</b>
	<b>Literatur</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten</b>	<b>52</b>
<b>B</b>	<b>Herleitung einer Identität für die Ableitung des Drucks</b>	<b>52</b>
<b>C</b>	<b>Herleitung der verwendeten Definition des Batchelor-Wirbels</b>	<b>53</b>
<b>D</b>	<b>Analytische Berechnung des konvektiven Terms der Euler-Gleichung bei mehreren Wirbeln</b>	<b>54</b>
<b>E</b>	<b>Übersicht über die dieser Arbeit zu Grunde liegenden Simulationen</b>	<b>57</b>
<b>F</b>	<b>Zusätzliches Bildmaterial</b>	<b>59</b>
F.1	Einzelne Erlebacher-Wirbel . . . . .	59
F.2	Stabilitätsbetrachtungen für Erlebacher Wirbel . . . . .	62
F.3	Zeitliche Entwicklung eines Spiralplatzens . . . . .	64
F.4	Schnitte senkrecht zu $x$ -Achse für Batchelor-Wirbel . . . . .	66
F.5	Weitere Stromlinienbilder von der Interaktion zweier Wirbel . . . . .	72

# 1 Nomenklatur

In dieser Arbeit werden die folgende Formelzeichen und Abkürzungen verwendet.

## Formelzeichen:

Variable	Bedeutung	Einheit
$x$	kartesische Koordinate und axiale Zylinder-Koordinate	[m]
$y, z$	kartesische Koordinaten	[m]
$r$	radiale Zylinder-Koordinate in der $y$ - $z$ -Ebene	[m]
$\phi$	azimutale Zylinder-Koordinate in der $y$ - $z$ -Ebene	dimensionslos
$\varrho$	Dichte	[kg / m <sup>3</sup> ]
$p$	Druck	[Pa]
$u_x$	axiale Geschwindigkeitskomponente	[m/s]
$u_y$	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung	[m/s]
$u_z$	Geschwindigkeitskomponente in $z$ -Richtung	[m/s]
$\vec{u}$	Geschwindigkeitsvektor aus $u_x$ , $u_y$ und $u_z$	[m/s]
$u_r$	radiale Geschwindigkeitskomponente	[m/s]
$u_\phi$	azimutale Geschwindigkeitskomponente	[m/s]
$u_\infty$	Geschwindigkeit der Strömung am Anfang des Simulationsbereichs, parallel zur $x$ -Achse	[m/s]
$\nu$	kinematische Viskosität	[m <sup>2</sup> / s]
$\gamma$	Isentropenexponent $c_p / c_V$	dimensionslos
$c_s$	Schallgeschwindigkeit	[m/s]
$\vec{\omega}$	Wirbelvektor	[1/s]
$\Gamma$	Zirkulation	[m <sup>2</sup> / s]
Re	Reynolds-Zahl, Kennzahl für Verhältnis aus Trägheitskraft und Viskositätseffekten in einer Strömung	dimensionslos
Ro	Rossby-Zahl, Kennzahl für Verhältnis aus Trägheitskraft und Coriolis-Kraft in einer Strömung	dimensionslos
$\Delta u_{x \max}$	Geschwindigkeitsdifferenz zwischen $u_x$ im Zentrum eines Wirbels und $u_\infty$	[m/s]
$R$	Radius des Wirbelkerns	[m]
$s$	Swirl-Rate $\max(u_\phi) / u_x(r = 0)$	dimensionslos
$\xi$	konstanter Faktor in einer verwendeten Wirbeldefinition, $\xi \approx 0,6381726863389516$	dimensionslos
$e$	Euler'sche Zahl	dimensionslos

## Abkürzungen:

Abkürzung	Bedeutung
C <sup>2</sup> A <sup>2</sup> S <sup>2</sup> E:	„Center for Computer Applications in AeroSpace Science and Engineering“, Abteilung des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik des DLRs
DLR	„Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt“
LES	„large eddy simulation“, Strömungsmodell, bei dem große Skalen vollständig aufgelöst und kleine Skalen genähert werden
RANS	„Reynolds Averaged Navier-Stokes“, über kurze Zeitintervalle gemittelte Variante der Navier-Stokes-Gleichungen, meist ergänzt durch ein Modell zur Turbulenzmodellierung
TAU-Code	„Triangular Adaptive Upwind Code“, ein Software-Paket des DLRs zur numerischen Strömungssimulation

## 2 Einleitung

Wirbelströmungen sind ein allgegenwärtiges Phänomen. Vom Abfluss der Badewanne bis zur zerstörerischen Gewalt eines Tornados sind sie in vielen Lebensbereichen zu entdecken. Eine große Bedeutung haben Wirbelströmungen in der Luftfahrt, und sie werden bis heute im Rahmen von Untersuchungen, welche Effekte das Strömungsgeschehen zum Beispiel an Flügeln prägen, intensiv betrachtet. Dabei wird seit 1957 über die Beobachtung berichtet [30], dass Wirbel in einer axialen Strömung unter bestimmten Umständen aufplatzen. Dabei vergrößert sich der Radius des Wirbels schlagartig und die axiale Strömung kommt im Kern des Wirbels entweder zum Erliegen oder es findet sogar Rückströmung statt.

Zuerst beobachtet wurde das Platzen von Wirbeln über Delta-Flügeln. Diese besitzen in der Regel zwei Methoden zur Auftriebserzeugung: Bei geringen Anstellwinkeln funktionieren sie wie gewöhnliche Flügel; bei hohen Anstellwinkeln ziehen sie aber bis zu 60% ihres Auftriebs aus sogenannten Tütenwirbeln [3], die einen großen Teil der Flügeloberseite bedecken: Die Anströmung löst an den Flügelvorderkanten ab und rollt sich nach innen auf (siehe Abbildung 1). Durch die zusätzliche Rotationsgeschwindigkeit sinkt der Druck in den Wirbeln (Venturi-Effekt) und damit über den Flügeln.

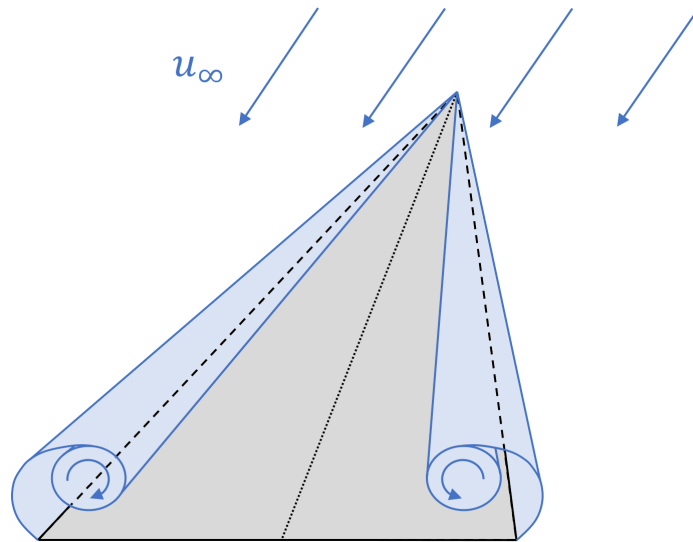


Abbildung 1: Die Tütenwirbel über einem Deltaflügel, die sich durch das Ablösen der Anströmung  $u_\infty$  an den Vorderkanten bilden. Die Anströmung trifft hier schräg von unten auf den Flügel.

Durch Aufplatzen der Tütenwirbel (siehe Abbildung 2) sinkt die Rotationsgeschwindigkeit erheblich und der Auftrieb reicht eventuell nicht mehr aus, um das Flugzeug zu tragen. Noch kritischer kann ein einseitiges Aufplatzen sein: Durch den Auftriebsverlust auf einer Seite entsteht hierbei ein erhebliches Rollmoment. In beiden Fällen ist die Flugstabilität erheblich gefährdet.



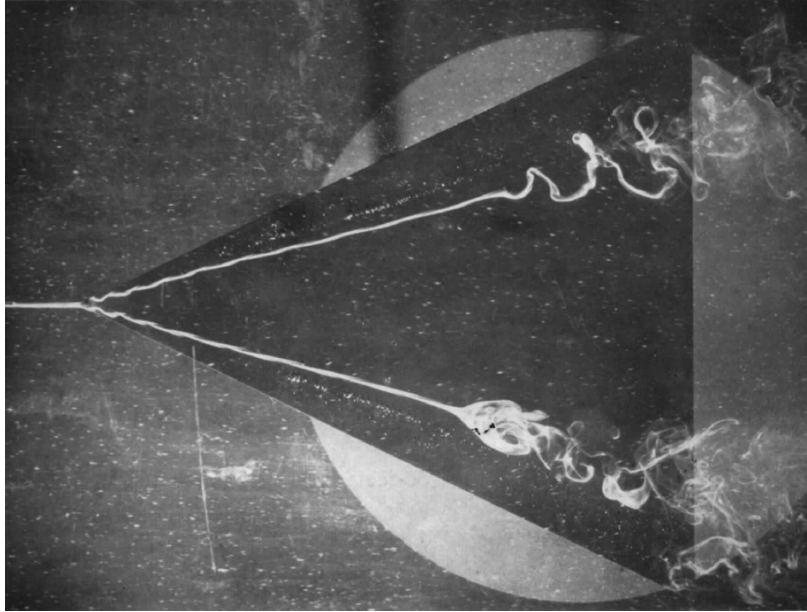


Abbildung 2: Wirbelplatzen über dem Modell eines Deltaflügels in einem Wasserkanal. Die Wirbelkerne sind mit Tinte eingefärbt. Es kann sowohl ein Aufplatzen nach dem Blasentyp (unten) als auch nach dem Spiraltyp (oben) beobachtet werden. Entnommen aus [23].

Das Aufplatzen kann auch positive Effekte haben: So hinterlassen beispielsweise Flugzeuge im Flug hinter ihren Tragflächen sogenannte Wirbelschleppen, das sind Bereiche mit starken Luftwirbeln, die durch die Strömung über die Tragflächen erzeugt werden. Diese können bei größeren Flugzeugen minutenlang zu derart starken Turbulenzen führen, dass nachfolgende Flugzeuge erheblich gefährdet werden. Ein gezieltes Aufplatzen der Wirbel hinter den Tragflächen kann die Stärke dieser Wirbelschleppen reduzieren und so in stark frequentierten Lufträumen die Flugsicherheit erhöhen [15].

Um das Phänomen des Wirbelplatzens näher zu untersuchen und zu verstehen wurden bis heute zahlreiche Experimente und numerische Simulationen durchgeführt sowie verschiedene Theorien aufgestellt. Dennoch ist bis heute keine vollständige theoretische Beschreibung des Wirbelplatzens gefunden worden [25], und numerische Simulationen können experimentelle Untersuchungen noch nicht vollständig ersetzen [26].

In dieser Arbeit soll das Phänomen aufplatzender Wirbel in kompressiblen Strömungen untersucht werden. Dazu wird sowohl auf theoretische Betrachtungen als auch auf numerische Simulationen zurückgegriffen. Im ersten Schritt wird eine Simulationsumgebung geschaffen, in der ein oder mehrere Wirbel unabhängig von spezifischen Flügelkonfigurationen simuliert werden können. Ziel ist dabei die erfolgreiche Reproduktion aufplatzender Wirbel, wie sie in Experimenten beobachtet werden. Im Anschluss wird exemplarisch die Interaktion mehrerer Wirbel untersucht, mit dem Ziel, das Aufplatzverhalten gezielt zu beeinflussen. Als Werkzeug für die numerischen Simulationen wird der TAU-Code des DLRs verwendet.

### 3 Erläuterung einiger Grundbegriffe

Als Wirbel werden im Rahmen dieser Arbeit Strömungen bezeichnet, die um eine Rotationsachse herum fließen; dabei ergeben sich geschlossene oder spiralförmige Stromlinien. Solche Strömungen werden üblicherweise durch zwei Größen charakterisiert, den Wirbelvektor  $\vec{\omega}$  und die Zirkulation  $\Gamma$  ([34], S. 39).

Die Komponenten  $\omega_i$  des Wirbelvektors sind proportional zur mittleren lokalen Winkelgeschwindigkeit um die  $i$ -te Koordinatenachse. Es gilt:

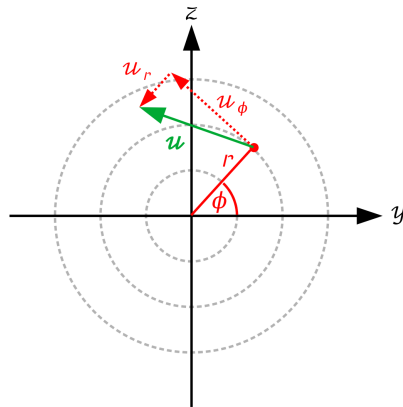
$$\vec{\omega} := \text{rot}(\vec{u})$$

Die Zirkulation (oder Wirbelstärke)  $\Gamma$  ist ein Maß für die Rotation eines Fluids in einer Fläche  $A$ :

$$\Gamma := \int_A \text{rot}(\vec{u}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Eine wirbelbehaftete Strömung besitzt mindestens einen Punkt, an dem diese Größen nicht null sind.

Zunächst soll ein einfacher Wirbel in zwei Dimensionen betrachtet werden, die entgegen der Konvention mit den Buchstaben  $y$  und  $z$  bezeichnet werden. Eine um den Ursprung rotierende Strömung kann hier am besten in Polarkoordinaten beschrieben werden. Dabei entspricht der Koordinatenmittelpunkt der Rotationsachse und es gilt:



$$r := \sqrt{y^2 + z^2} \quad y = r \cos(\phi)$$

$$\phi := \arctan\left(\frac{z}{y}\right) \quad z = r \sin(\phi)$$

$$u_r = \cos(\phi) u_y + \sin(\phi) u_z$$

$$u_\phi = -\sin(\phi) u_y + \cos(\phi) u_z$$

$$u_y = \cos(\phi) u_r - \sin(\phi) u_\phi$$

$$u_z = \sin(\phi) u_r + \cos(\phi) u_\phi$$

Abbildung 3: Definition der Polarkoordinaten in der  $y$ - $z$ -Ebene am Beispiel eines Geschwindigkeitsvektors  $u$ .

In diesen Koordinaten ist die Rotation des Fluids um den Mittelpunkt durch die Azimutalgeschwindigkeit  $u_\phi$  gegeben. Aufgrund von Reibungseffekten<sup>1</sup> verhält sich ein Wirbel im Zentrum näherungsweise wie ein rotierender Festkörper, d. h. die Azimutalgeschwindigkeit steigt linear mit  $r$ :

$$u_\phi^{(\text{Festk.})} = c r, \quad c = \text{konst.}$$

Dieser Bereich wird als *Wirbelkern* bezeichnet. Weiter außen ist in der Regel eine drehungsfreie Strömung zu beobachten, das heißt sowohl  $\vec{\omega}$  als auch  $\Gamma$  verschwinden<sup>2</sup>. Ein solcher Wirbel wird als Potentialwirbel bezeichnet:

$$u_\phi^{(\text{Pot.})} = \frac{c}{r}, \quad c = \text{konst.}$$

<sup>1</sup>Wie in Abbildung 4 zu sehen ist, muss  $u_\phi$  bei einer stetigen Verteilung der Geschwindigkeit im Wirbelmittelpunkt null sein. Damit gibt es stets eine Umgebung des Mittelpunkts, in der die Geschwindigkeit so klein ist, dass Reibungseffekte dominieren.

<sup>2</sup>Der Integrationsbereich für  $\Gamma$  liegt vollständig außerhalb des Wirbelkerns.

Ein Wirbelprofil, in dem sich die Azimutalgeschwindigkeit für  $r \leq R$  wie in einem Festkörperwirbel und für  $r \geq R$  wie in einem Potentialwirbel verhält, wird als Rankine-Wirbel bezeichnet (vgl. Abbildung 4). Hier bezeichnet  $R$  den Radius des Wirbelkerns. In einer reibungsbehafteten Strömung ist aber zu erwarten, dass die Geschwindigkeitsverteilung auch am Übergang zwischen den beiden Arten differenzierbar ist. Experimente von Bhagwat und Leishman [6] zeigen, dass der Übergang gut mit einem sogenannten Batchelor-Wirbel<sup>3</sup> [4] beschrieben werden kann:

$$u_r = 0$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma_{\text{ges}}}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right]$$

$\Gamma_{\text{ges}}$  ergibt sich dabei, wenn über die gesamte  $y$ - $z$ -Ebene integriert wird. Für einige numerische Anwendungen ist es hilfreich, wenn der Wirbel eine verschwindende Gesamtzirkulation hat und die Geschwindigkeitskomponenten des Wirbels schneller als mit  $1/r$  abfallen. Hierfür kann zum Beispiel die folgende Definition nach Erlebacher et al. [10] verwendet werden:

$$u_r = 0$$

$$u_\phi = u_{\phi \text{ max}} \frac{r}{R} \exp\left(-\frac{r^2 - R^2}{2R^2}\right)$$

Im Falle der Tütenwirbel (und einiger anderer Anwendungen) wird die zwei-dimensionale Wirbelströmung durch eine dazu senkrechte Strömungskomponente  $u_x$  ergänzt. In diesem Fall kann die  $x$ -Geschwindigkeit im Inneren des Wirbels mit der Umgebungsgeschwindigkeit  $u_\infty$  übereinstimmen ( $u_x = u_\infty$ ), es kann aber auch zu Abweichungen kommen. In letzterem Fall spricht man von einem „Jet“, wenn  $u_x(r) > u_\infty$  ist, und einem „Wake“, wenn  $u_x(r) < u_\infty$  ist. Sowohl für den Batchelor-Wirbel als auch für den Erlebacher-Wirbel wird dabei angenommen, dass die Abweichung die Form einer Gaußkurve in radialer Richtung annimmt; mit einer maximalen Abweichung  $\Delta u_{x \text{ max}}$  bei  $r = 0$ . Damit ergibt sich für den Batchelor-Wirbel die folgende Definition:

$$u_r = 0$$

$$u_\phi = \frac{u_{\phi \text{ max}}}{\xi} \frac{R}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right]$$

$$u_x = u_\infty + \Delta u_{x \text{ max}} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (1)$$

Hierbei ist  $u_{\phi \text{ max}}$  die maximale azimutale Geschwindigkeit,  $R$  der Radius des Wirbelkerns,  $\Delta u_{x \text{ max}}$  die Abweichung der  $x$ -Geschwindigkeit bei  $r = 0$  und  $\xi \approx 0,638173$  eine Konstante (Herleitung siehe Anhang C).

Für den Wirbel nach Erlebacher gilt entsprechend:

$$u_r = 0$$

$$u_\phi = u_{\phi \text{ max}} \frac{r}{R} \exp\left(-\frac{R^2 - r^2}{2R^2}\right)$$

$$u_x = u_\infty + \Delta u_{x \text{ max}} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (2)$$

Die Geschwindigkeitsprofile beider Wirbel sind, zusammen mit dem Rankine-Wirbel, in Abbildung 4 gegenübergestellt.

---

<sup>3</sup>Diese Wirbelform wird in der Literatur auch als „Q-Wirbel“ oder (in zwei Dimensionen) als „Lamb-Oseen-Wirbel“ bezeichnet.

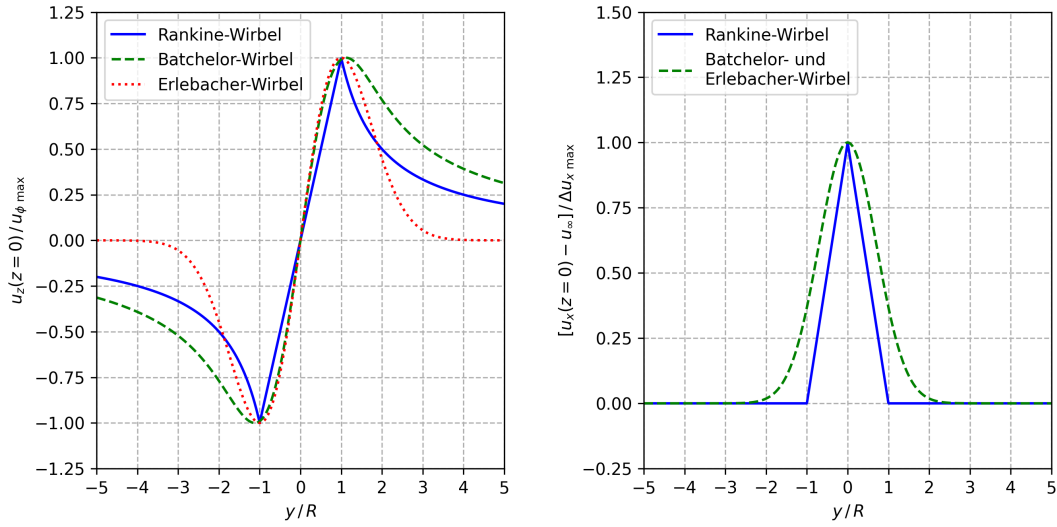


Abbildung 4: Die Geschwindigkeitsprofile verschiedener Wirbelmodelle in azimuthaler und axialer Richtung. Hier dargestellt als Schnitt entlang der  $y$ -Achse.

Zur Visualisierung der Wirbelströmungen wird ein Kriterium benötigt, das es erlaubt, Punkte innerhalb und außerhalb der Wirbel zu unterscheiden. Ein häufig verwendetes Kriterium basiert auf der sogenannten „ $\lambda_2$ -Methode“ [20]. Hierfür wird zunächst der Gradiententensor  $J$  der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  berechnet, und in einen symmetrischen Anteil ( $S$ ) und einen antisymmetrischen Anteil ( $\Omega$ ) aufgeteilt:

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u_x & \partial_y u_x & \partial_z u_x \\ \partial_x u_y & \partial_y u_y & \partial_z u_y \\ \partial_x u_z & \partial_y u_z & \partial_z u_z \end{pmatrix} = \frac{J + J^T}{2} + \frac{J - J^T}{2} = S + \Omega \quad (3)$$

Dann werden die drei Eigenwerte  $\lambda_{1,2,3}$  der Matrix  $S^2 + \Omega^2$  berechnet und so sortiert, dass  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$  ist. Punkte in der Strömung, an denen  $\lambda_2$  negativ ist, gehören dabei zu einem Wirbel, und der Betrag von  $\lambda_2$  korrespondiert zur Azimutalgeschwindigkeit. Der Verlauf des Wirbels kann daher z. B. durch Isoflächen mit einem konstanten  $\lambda_2$ -Wert dargestellt werden. Für die in dieser Arbeit betrachteten Wirbel nimmt  $\lambda_2$  in der Nähe der Wirbelkerne sehr große Werte an; für die Isoflächen in den Darstellungen werden in der Regel Werte zwischen -15 000 und -20 000 verwendet.

## 4 Aktueller Stand der Forschung

Eine klare Definition des Wirbelplatzens erscheint schwierig, da das Phänomen zahlreiche verschiedene Ausprägungen aufweist. Allen ist aber gemeinsam, dass die axiale Strömung in der Umgebung der Rotationsachse des Wirbels zum Erliegen kommt. Die Strömung weicht dann diesem Staupunkt je nach Ausprägung auf eine bestimmte Weise aus, wodurch der Durchmesser des Wirbels<sup>4</sup> stark ansteigt.

Trotz intensiver Forschung ist bis jetzt keine vollständige theoretische Beschreibung gefunden worden [25]. Es wurden aber zahlreiche Experimente und numerische Simulationen durchgeführt sowie verschiedene Theorien aufgestellt, die das Phänomen zumindest kategorisieren und teilweise beschreiben. In diesem Kapitel soll ein Überblick über die bisherigen Erkenntnisse gegeben werden.

### 4.1 Experimentelle Untersuchungen

Nach anfänglichen Experimenten mit Deltaflügeln wurde das Phänomen in besser kontrollierbaren Umgebungen untersucht. Hierzu wurden meist Rohrströmungen verwendet, in denen der Wirbelkern entweder über Tintenfäden in Wasser (z. B. [36], [11]) oder über Rauchfäden in Luft (z. B. [17]) sichtbar gemacht wurde. Auf diese Weise kann zwischen verschiedenen Ausprägungen des Platzens unterschieden werden. Die Anzahl und Definition der Ausprägungen variiert dabei je nach Autor zwischen drei [36] und sieben [13]; im Folgenden soll die Einteilung nach Sarpkaya erläutert werden.

*Achsensymmetrisches (blasenförmiges) Platzen:*

Der Staupunkt liegt auf der Rotationsachse des Wirbels, die Strömung weicht achsensymmetrisch zur Seite aus. Es entsteht eine Blase, in deren Inneren sich ein oder mehrere Wirbelringe befinden. Hinter der Blase kann sich ein neuer Wirbel ausprägen (z. B. [37]) oder die Struktur geht durch Turbulenz verloren (siehe Abb. 5).

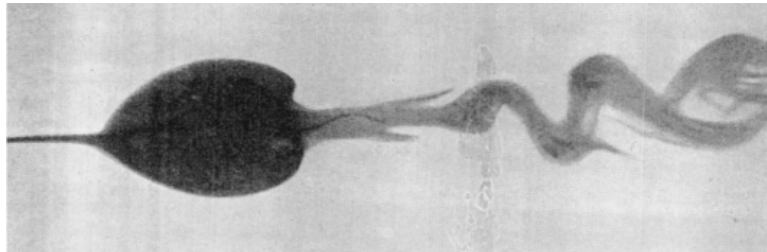


Abbildung 5: Achsensymmetrisches Aufplatzen eines Wirbels in einem Wasserkanal mit anschließender Auflösung der Struktur durch Turbulenz. Der Wirbelkern ist mit Tinte eingefärbt. Entnommen aus [36].

*Spiralförmiges Platzen:*

Der Staupunkt liegt neben der Rotationsachse, der Wirbelkern biegt mit einem scharfen Knick in die entgegengesetzte Richtung zur Seite ab und wickelt sich dann spiralförmig auf (siehe Abbildung 6). Der Staupunkt und der Knick präzessieren um die Mittelachse, wobei die Drehsinne dieser Bewegung und des Wirbels gleich [36] oder entgegengesetzt ausfallen können [23].

---

<sup>4</sup>Der Durchmesser des Wirbels ist hier definiert als das Doppelte des Radius  $r$ , bei dem die azimuthale Geschwindigkeit  $u_\phi$  maximal wird.

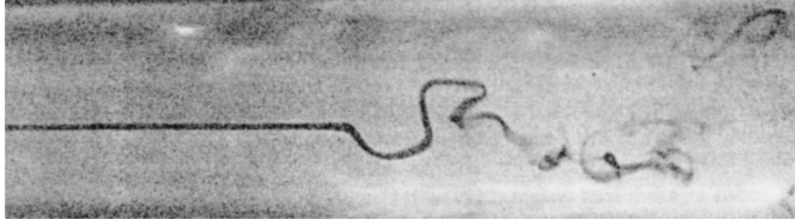


Abbildung 6: Spiralförmiges Aufplatzen eines Wirbels in einem Wasserkanal. Der Wirbelkern ist mit Tinte eingefärbt. Entnommen aus [24].

#### *Doppelhelix-förmiges Platzen:*

Der Wirbel expandiert entlang einer Achse senkrecht zur Axialströmung und schrumpft entlang der anderen, bis er ein flaches Band bildet. Dieses wird um die Mittelachse verdreht, sodass die beiden Enden des Bands eine Doppelhelix bilden (siehe Abbildung 7). Die axiale Strömung entlang der Mittelachse wird hierbei zwar deutlich verlangsamt, kommt aber nicht notwendigerweise zum Erliegen. Daher erfüllt dieser Fall streng genommen nicht die Definition des Wirbelplatzens, wird aber dennoch gemeinhin hinzugezählt [7].

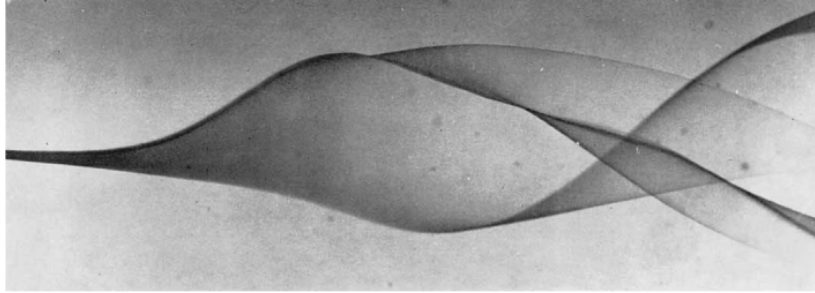


Abbildung 7: Doppelhelix-förmiges Aufplatzen eines Wirbels in einem Wasserkanal. Der Wirbelkern ist mit Tinte eingefärbt. Entnommen aus [36].

Welche Ausprägung beobachtet wird, hängt von vielen Faktoren ab: Der Doppelhelix-Typ wird ausschließlich bei niedrigen Reynolds-Zahlen ( $Re < 2000$ ) beobachtet [25], während Spiral-Typ und Blasen-Typ bei allen Reynolds-Zahlen zu beobachten sind [36]. Für steigende Zirkulation bzw. Azimutalgeschwindigkeit geht ein Spiral-Typ graduell in einen Blasen-Typ über, während der Aufplatzzpunkt stromaufwärts wandert [13]. Angesichts des graduellen Übergangs wurde argumentiert, dass der Spiral- und Blasen-Typ Ausprägungen desselben physikalischen Phänomens sind [12]. Dies ist bis heute nicht abschließend geklärt.

## 4.2 Theoretische Beschreibung

Es gibt zahlreiche Ansätze, das Aufplatzen von Wirbeln theoretisch zu erklären und zu beschreiben. Erste Theorien wurden unter anderem von Squire [42] und Benjamin [5] aufgestellt. Sie betrachten Störungen im Geschwindigkeitsfeld, die sich in der Strömung mit einer Gruppengeschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Sie erklären das Wirbelplatzen mit einem Übergang eines überkritischen Zustands (Störungen breiten sich nur stromabwärts aus) zu einem unterkritischen Zustand (Störungen breiten sich in alle Richtungen aus). Laut Squire sammeln sich alle flussabwärts erzeugten Störwellen am Übergangspunkt an und führten so zu einem abrupten Aufplatzen. Benjamin dagegen betrachtet das Aufplatzen selbst als eine stehende Welle bzw. ein Soliton [5], in direkter Analogie zu einem hydraulischen Sprung in einer Kanalströmung. Anstelle der Froude-Zahl konstruiert er eine Größe  $N$  aus der absoluten Gruppengeschwindigkeit von Wellen in Strömungsrichtung ( $c_+$ ) und entgegen der Strömungsrichtung ( $c_-$ ):

$$N = \frac{c_+ + c_-}{c_+ - c_-} \quad (4)$$

Trotz unterschiedlicher Interpretationen kamen Squire und Benjamin auf das gleiche Stabilitätskriterium für Wirbel in axialer Strömung. Demnach platzt ein Wirbel auf, wenn seine Swirl-Rate  $s$ , definiert als das Verhältnis aus dem Maximum des Betrags der azimuthalen Geschwindigkeit und der axialen Geschwindigkeit im Wirbelkern, einen Grenzwert von 1,2 erreicht:

$$s := \frac{\max_r |u_\phi|}{u_x(r=0)} \quad (5)$$

$$s_{\text{instabil}} \geq 1,2 \quad (6)$$

Experimente belegen zwar einen Übergang von einer überkritischen Strömung vor dem Aufplatzen zu einer unterkritischen Strömung dahinter [13], dies scheint allerdings nur ein notwendiges und kein hinreichendes Kriterium zu sein [25].

Ein weiterer Ansatz, der vor allem von Hall beschrieben wird [15], ist der Vergleich zwischen Wirbelplatzen und der Ablösung einer Grenzschichtströmung. Für eine Grenzschicht können verschiedene Annahmen getroffen werden, mit denen sich die Navier-Stokes-Gleichungen zu den Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen vereinfachen. Ergibt sich aus den Grenzschichtgleichungen eine Strömungsablösung, so stimmt deren Position ungefähr mit der tatsächlichen Position der Ablösung überein, auch wenn an dieser Stelle die Annahmen für die Näherung versagen. Analog dazu stellt Hall ein System aus genäherten Strömungsgleichungen für schlanke, achsensymmetrische Wirbel auf. Ausgehend von einer Randbedingung können diese stromabwärts aufintegriert werden, bis das Resultat die getroffenen Annahmen verletzt. Vergleiche mit Experimenten zeigen zumindest eine qualitative Übereinstimmung für die Position des so ermittelten Aufplatzzpunkts.

Zudem leitet Hall her, dass im Falle eines zylindersymmetrischen, inkompressiblen Wirbels ein axialer Druckgradient auf das Innere eines Wirbels stärker wirkt als auf den Rest der Strömung:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{r=0} - \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{r=R} = - \int_0^R \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\varrho u_\phi^2}{r} \right) dr \sim \varrho \frac{\Gamma^2}{R^3} \quad (7)$$

Das deckt sich mit experimentellen Beobachtungen von Lambourne [23], der positive axiale Druckgradienten als eine Hauptursache für das Platzen von Wirbeln sieht. Da die Rechnungen aber kurz vor dem Aufplatzzpunkt versagen, können keinerlei Vorhersagen über die genaue Form des Platzens oder den Strömungsverlauf stromabwärts davon getroffen werden. Damit erweist sich die Analogie als unzureichend für eine vollständige Beschreibung des Phänomens.

Ein dritter Erklärungsansatz basiert auf hydrodynamischen Instabilitäten. Bereits 1916 wies Lord Rayleigh nach, dass ein reibungsfreies rotierendes Fluid nur dann stabil sein kann, wenn der Drehimpuls senkrecht zur Drehachse monoton steigt [33]:

$$\frac{d(r u_\phi)^2}{dr} \geq 0 \quad (8)$$

Diese Bedingung kann dann im Kontext verschiedener Störungen der Wirbelströmung untersucht werden. Dieser Ansatz wird zum Beispiel von Howard und Gupta [19], sowie Ludwig [28] verfolgt; allerdings zeigt sich stets eine hohe Stabilität gegenüber achsensymmetrischen Störungen. Das Aufplatzen nach dem achsensymmetrischen Typ kann entsprechend nicht begründet werden (siehe z. B. Garg und Leibovich [14]).

Da keiner der vorgestellten Ansätze das Phänomen vollständig beschreibt, wurden zahlreiche Kombinationen und Erweiterungen der Modelle vorgeschlagen, zum Beispiel eine Kombination von Benjamins Wellenansatz und hydrodynamischen Instabilitäten [32]. Escudier und Keller [12] schlagen dafür einen zweistufigen Prozess vor, bei dem der Wirbel zunächst zwischen zwei überkritischen Zuständen wechselt, bevor er analog zu Benjamins Theorie zu einem unterkritischen übergeht (vgl. Abbildung 8).

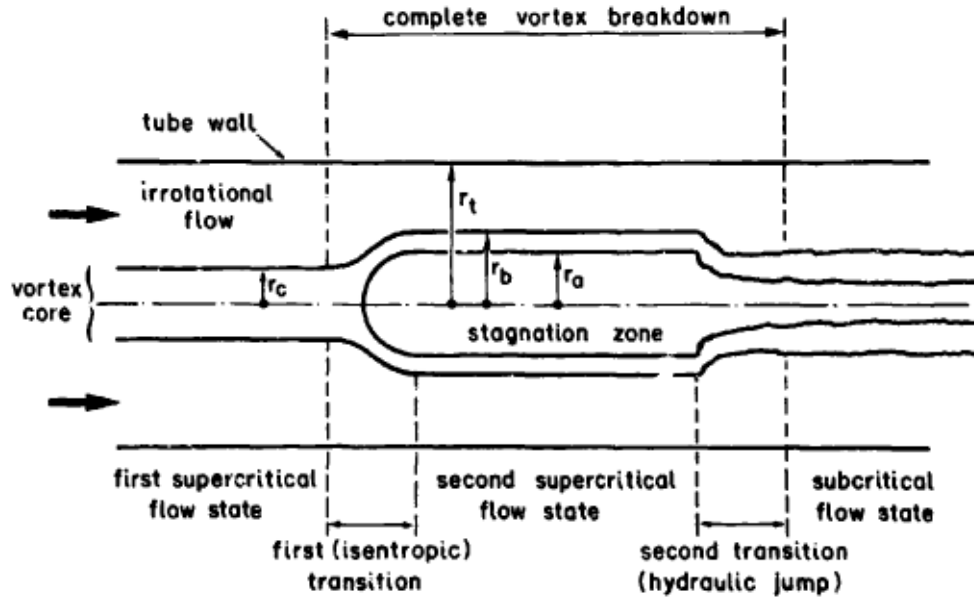


Abbildung 8: Zweistufiges Aufplatzen nach Escudier und Keller. Der Wirbel geht zunächst isentropisch von einem überkritischen Zustand in einen anderen (mit Totwassergebiet in der Mitte) über, bevor er analog zu einem hydraulischen Sprung in einen unterkritischen Zustand fällt. Entnommen aus [12].

Dadurch kann zum Beispiel erklärt werden, warum ein achsensymmetrisches Aufplatzen wie in Abbildung 5 zunächst ohne nennenswerte Turbulenz erfolgt, bevor es weiter stromabwärts zu deutlicher Turbulenz (und damit Dissipation) kommt.

### 4.3 Numerische Untersuchungen

Wirbelplatzen wurde bereits früh auch numerisch untersucht, um an Größen wie die räumliche Druckverteilung zu gelangen, die experimentell nur schwer messbar sind. Zunächst wurde dabei von Halls Theorie der zusammenbrechenden Zylinder-Symmetrie ausgegangen. Die Wirbel wurden in zwei-dimensionalen, quasi-zylindrischen Simulationen modelliert und galten dann als aufgeplatzt, wenn die Simulation abstürzte. Später folgten zwei-dimensionale Rechnungen der vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen; die experimentellen Befunde konnten aber dennoch nur in Teilen reproduziert werden [25].

Mit Hilfe von drei-dimensionalen Simulationen der zeitabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen können Spall und Gatski dagegen alle drei Ausprägungen des Wirbelplatzens nachbilden (Blase, Spirale und Helix) und die Existenz von Wirbelringen in der Blase des achsensymmetrischen Aufplatztyps bestätigen [38, 39, 40]. Zusätzlich reproduzieren sie den experimentellen Befund, dass die Position des Aufplatzipunktes wesentlich von der Größe des axialen Druckgradienten beeinflusst wird.

Zeitabhängige Simulationen von Breuer und Hänel [8] zeigen ebenfalls gute Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen, demonstrieren aber auch ein grundsätzliches Problem: Da der Aufplatzipunkt entlang der Achse wandern kann, kann er den Einlass- oder Auslassrand der Simulation erreichen, wodurch die Ergebnisse verfälscht werden. Eine mögliche Lösung für dieses Problem sind dynamische Randbedingungen [21], die den Aufplatzipunkt in der Mitte des Simulationsgebiets einfangen. Diese beeinflussen aber auch die Strömung und laufen damit dem Ziel einer möglichst allgemeinen Untersuchung zuwider. Eine Alternative ist die Wahl einer Geometrie, in der die kritischen Strömungsbedingungen nur in einem vordefinierten Bereich erreicht werden (siehe Kapitel 6).

Nicht abschließend geklärt ist auch die genaue Bedeutung von Reibungseffekten. Hitzel konnte in Simulationen an einfachen Deltaflügeln zeigen, dass Wirbelplatzen auch ohne Reibungseffekte auftritt und in guter Übereinstimmung mit Experimenten steht [18]. Sei-



ner Meinung nach ist der Druckanstieg in axialer Richtung von wesentlich größerer Bedeutung. Darmofal [9] verglich theoretische Berechnungen ohne Reibungseffekte mit reibungsbehafteten numerischen Simulationen und kam zu dem Ergebnis, dass die Reibung keinen wesentlichen Einfluss auf die beobachteten Effekte hat. In ähnliche Richtung argumentiert auch Melville [29]. Einige weitere interessante Effekte, insbesondere das Ausbilden von Sekundärwirbeln an der Flügeloberfläche, lassen sich allerdings ohne die Berücksichtigung von Reibungseffekten nicht nachbilden (siehe z. B. [18], [27]).

In den letzten Jahren lag der Fokus vermehrt auf ganzheitlichen Simulationen, in denen Wirbelplatzen nicht mehr isoliert, sondern im Kontext verschiedener Flügel- und Flugzeuggeometrien untersucht wurde. Hier zeichnen sich insbesondere kombinierte RANS/LES-Simulationen als vielversprechend ab [26].

## 5 Theoretische Grundlagen dieser Arbeit

Thema der Arbeit ist die Untersuchung von Wirbelplätzen unter möglichst allgemeinen Umständen. Daher soll auf eine spezifische Wirbelerzeugung im Inneren des Simulationsgebiets verzichtet werden. Stattdessen werden die Wirbel am Anfang des Simulationsgebiets analytisch über Randbedingungen vorgegeben und können sich dann im Inneren frei entwickeln, bevor die Strömung den Simulationsbereich auf der anderen Seite verlässt. Damit die Form des Simulationsbereichs die Wirbel möglichst wenig verändert, wird eine achsensymmetrische Form gewählt.

Da reale Strömungen (z. B. um Deltaflügel) häufig kompressible Effekte beinhalten, sollen diese auch in den durchgeführten Rechnungen und Simulationen berücksichtigt werden. Viskose Effekte sollen dagegen aufgrund der Beobachtungen von Darmofal [9] vernachlässigt werden. Damit wird auch der zeitliche Aufwand der Simulationsrechnungen reduziert. Es werden daher alle Simulationen auf Basis der Euler-Gleichungen durchgeführt:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (9)$$

Die Dichte wird durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho \vec{u}) = 0 \quad (10)$$

Ohne Reibung findet außerdem keine Dissipation statt. Solange die Simulationen keine Stoßwellen aufweisen, können alle Prozesse als isentrop angenommen werden.

Für eine geeignete Wahl der Größenordnung des Simulationsbereichs erfolgt eine Orientierung an existierenden Deltaflügeln. Dazu wird ein Rohr mit einem Durchmesser von 10 m und einer Länge von 16 m als Simulationsbereich vorgegeben. Die Diskussion der genauen Abmessungen folgt im nächsten Kapitel.

### 5.1 Definition der Geometrie

Ohne Reibung ist der axiale Druckgradient die wesentliche Ursache für die Destabilisierung des Wirbels [18]. Um diesen zu erzeugen, kann in einer Unterschallströmung der Rohrradius vergrößert werden. Der Druckanstieg zwischen zwei Punkten 1 und 2 auf derselben Stromlinie kann wie folgt genähert werden:

Angenommen, ein Rohr mit variablem Radius  $r$  wird von einer reibungsfreien Strömung durchflossen, die die  $x$ -Geschwindigkeit  $u$  besitzt. Es soll weiter angenommen werden, dass die Radiusveränderung so langsam geschieht, dass die radiale Geschwindigkeitskomponente im Vergleich zur axialen vernachlässigt werden kann<sup>5</sup>. Dann gilt für zwei Punkte 1 und 2 auf derselben Stromlinie:

$$\text{Energieerhaltung: } \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \quad (11)$$

$$\text{Massenerhaltung: } \pi r_1^2 \rho_1 u_1 = \pi r_2^2 \rho_2 u_2 \quad (12)$$

$$\text{Isentropische Rel.: } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} \quad (13)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 12 und 13 in Gleichung 11 können alle bis auf eine der unbekannten Größen eliminiert werden. So ergibt sich ein impliziter Ausdruck für diese Größe, der dann numerisch gelöst werden kann. Für den Druck  $p_2$  erhält man:

---

<sup>5</sup>In der verwendeten Geometrie haben die Rohrwände in der konischen Sektion einen Winkel zur Mittelachse von ca.  $7,125^\circ$ . Das entspricht einer maximalen Veränderung der axialen Geschwindigkeit von  $u_x^{(\text{gerades Rohr})} - u_x^{(\text{konisches Rohr})} = (1 - \cos(7,125^\circ)) u^{(\text{gerades Rohr})} \approx 0,008 u^{(\text{gerades Rohr})}$ . Die Veränderung der  $x$ -Geschwindigkeit ist also vernachlässigbar

$$\begin{aligned}
& \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{u_1^2}{2} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^4 \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\varrho_1 (p_2/p_1)^{1/\gamma}} \\
\Longleftrightarrow & \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{u_1^2}{2} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^4 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{2/\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{-1/\gamma} \\
\Longleftrightarrow & \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^4 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{2/\gamma} \right] = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{2 p_1}{\varrho_1 u_1^2} \left[ \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right] \quad (14)
\end{aligned}$$

Und für die axiale Geschwindigkeit  $u$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1 (\varrho_2 / \varrho_1)^\gamma}{\varrho_2} \\
\Longleftrightarrow & \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\varrho_1} \left( \frac{u_1 r_1^2}{u_2 r_2^2} \right)^{\gamma-1} \\
\Longleftrightarrow & 1 - \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{2 p_1}{\varrho_1 u_1^2} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{2-2\gamma} \left( \frac{u_2}{u_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right] \quad (15)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Kompressibilität ist der Anstieg des Drucks bei einer Vergrößerung der Querschnittsfläche nicht gleichmäßig, sondern ist zu Beginn des konischen Rohres stärker ausgeprägt.

Da die Strömung ohne Einbeziehung eines Wirbels am Beginn und Ende des Rohres parallel zur  $x$ -Achse erfolgen soll, in einem konischen Rohr aber leicht schräg verläuft, wird der Radius am Rohranfang und Rohrende jeweils für ein 4 m langes Segment konstant gehalten und die Übergänge zwischen den Segmenten werden Kreisbogen-förmig geglättet. Damit ergibt sich die Form des Rohrs, wie sie in der folgenden Abbildung 9 dargestellt ist:

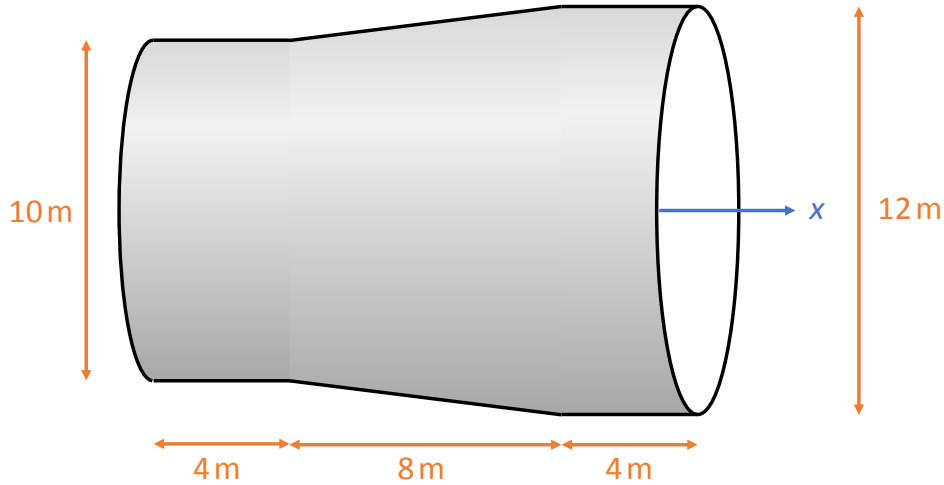


Abbildung 9: Der Querschnitt des (rotationssymmetrischen) Simulationsbereichs. Links: Einlasssegment, hier wird die Wirbelströmung eingebracht. Mitte: Konisches Segment, hier soll der Wirbel aufplatzen. Rechts: Auslasssegment, hier wird die Strömung für Kompatibilität mit der Fernfeldrandbedingung wieder parallelisiert.

Diese Wahl der Geometrie hat einen weiteren Vorteil: Da sich die Strömungsbedingungen im konischen Segment verändern, kann der Wirbel so gewählt werden, dass er im Einlasssegment stabil bleibt und dass erst in der konischen Sektion die Bedingungen für Aufplatzen erfüllt werden. So kann das Problem vermieden werden, dass der Aufplatzzpunkt an den Rohranfang wandert und die aufplatzende Strömung dort direkt mit der Randbedingung interagiert.

## 5.2 Definition der Randbedingungen

Das Simulationsgebiet hat drei Ränder, an denen Strömungsbedingungen bestimmt werden müssen. Die Rohrwand erhält eine reibungsfreie Randbedingung (im TAU-Code: „euler wall“), das heißt, lediglich die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand muss an der Wand auf Null abfallen, Geschwindigkeiten parallel zur Wand sind nicht vorgegeben.

Das Rohrende erhält eine Fernfeld-Randbedingung (im TAU-Code: „farfield“). Diese ist für Unterschallströmungen gedacht und soll einen Übergang zu einer gleichmäßigen Referenzströmung fern des Simulationsbereichs imitieren. Dabei wird ein Schema nach Roe [35] verwendet. Damit wird erreicht, dass die Randbedingung des Auslasses möglichst geringe Auswirkungen auf die im Rohr zu untersuchende Wirbelströmung hat.

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Wirbel und die zugehörige Anströmung werden über die Einlassrandbedingung definiert und damit komplett vorgegeben (im TAU-Code: „modify farfield“). Hierfür wird ein eigens entwickeltes Python-Programm verwendet, das für jeden Gitterpunkt auf dem Rand alle relevanten Größen berechnet. Für die Anströmung wird ein Druck von 101 325 Pa (eine Atmosphäre) und eine Geschwindigkeit von  $u_\infty = 0,5 c$  verwendet, bei einer Schallgeschwindigkeit von  $c = 331,288 \text{ m/s}$ . Bei dieser Anströmgeschwindigkeit können bereits kompressible Effekte beobachtet werden, gleichzeitig treten selbst mit Azimutalgeschwindigkeiten derselben Größenordnung noch keine Stoßwellen auf, die das Aufplatzverhalten zusätzlich verkomplizieren würden.

Die nächste Entscheidung betrifft die Form des Wirbels. Eine Studie von Bhagwat und Leishman [6] zeigt, dass der in Kapitel 3 beschriebene Batchelor-Wirbel eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten liefert. Daher wird er für diese Arbeit in der folgenden, oben bereits eingeführten Notation verwendet:

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\phi &= \frac{u_{\phi \max}}{\xi} \frac{R}{r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \\ u_x &= u_\infty + \Delta u_{x \max} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei ist  $u_{\phi \max}$  die maximale azimutale Geschwindigkeit,  $R$  der Radius des Wirbelkerns,  $\Delta u_{x \max}$  die Abweichung der  $x$ -Geschwindigkeit bei  $r = 0$  und  $\xi \approx 0,638173$  eine Konstante.

Zusätzlich sollen Wirbel nach der Definition von Erlebacher et al. [10] untersucht werden; auch diese wurden bereits in Kapitel 3 definiert:

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\phi &= u_{\phi \max} \frac{r}{R} \exp\left(-\frac{R^2 - r^2}{2 R^2}\right) \\ u_x &= u_\infty + \Delta u_{x \max} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Ergänzend zum Geschwindigkeitsfeld benötigt der TAU-Code auch die Verteilung von Druck und Dichte. Diese können aus der radialen Komponente der Euler-Gleichung in Zylinderkoordinaten (siehe Anhang A) hergeleitet werden:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\phi^2}{r} \quad (16)$$

In den Definition beider Wirbelformen ist  $u_r = 0$ . Damit müssen Druckkräfte und Zentrifugalkräfte im Gleichgewicht sein:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\phi^2}{r} \quad (17)$$

Integration liefert:

$$\int_{p(\infty)}^{p(r)} \frac{1}{\rho} dp = \int_\infty^r \frac{u_\phi^2}{r'} dr' \quad (18)$$

Es soll zunächst die rechte Seite berechnet werden. Für den Batchelor-Wirbel erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^r \frac{u_{\phi}^2}{r'} dr' &= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \int_{\infty}^r \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{R^2}\right)\right)^2}{r'^3} dr' \\
&= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \int_{\infty}^r \frac{1 - 2 \exp\left(-\frac{r'^2}{R^2}\right) + \exp\left(-2\frac{r'^2}{R^2}\right)}{r'^3} dr' \\
&= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \left( \left[ -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r'^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r'^2} \right]_{\infty}^r + \int_{\infty}^r \frac{\frac{4 r'}{R^2} \exp\left(-\frac{r'^2}{R^2}\right) - \frac{4 r'}{R^2} \exp\left(-2\frac{r'^2}{R^2}\right)}{2 r'^2} dr' \right) \\
&= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \left( -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r^2} + \frac{2}{R^2} \int_{\infty}^r \frac{\exp\left(-\frac{r'^2}{R^2}\right) - \exp\left(-2\frac{r'^2}{R^2}\right)}{r'} dr' \right) \\
&= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \left( -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r^2} + \frac{2}{R^2} \int_{\infty}^{\frac{r^2}{R^2}} \frac{\exp(-\zeta) - \exp(-2\zeta)}{2\zeta} d\zeta \right) \\
&= \frac{u_{\phi \max}^2 R^2}{\xi^2} \left( -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r^2} - \frac{1}{R^2} \int_{\frac{r^2}{R^2}}^{\infty} \frac{\exp(-\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{R^2} \int_{\frac{r^2}{R^2}}^{\infty} \frac{\exp(-2\zeta)}{2\zeta} 2d\zeta \right) \\
&= \left( \frac{u_{\phi \max} R}{\xi} \right)^2 \left( -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r^2} - \frac{1}{R^2} E_1\left(\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{1}{R^2} E_1\left(2 \frac{r^2}{R^2}\right) \right) \\
&= \left( \frac{u_{\phi \max}}{\xi} \right)^2 \left( -\frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right)^2}{2 r^2 / R^2} - E_1\left(\frac{r^2}{R^2}\right) + E_1\left(2 \frac{r^2}{R^2}\right) \right) \quad (19)
\end{aligned}$$

In der fünften Zeile von Gleichung (19) wird mit  $r' = R\sqrt{\zeta}$  substituiert;  $E_1$  steht für die Integralexponentialfunktion erster Ordnung.

Für den Wirbel nach Erlebacher ergibt sich für die rechte Seite folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\int_{\infty}^r \frac{u_{\phi}^2}{r'} dr' &= u_{\phi \max}^2 \int_{\infty}^r \frac{1}{r'} \left[ \frac{r'}{R} \exp\left(\frac{1 - \frac{r'^2}{R^2}}{2}\right) \right]^2 dr' \\
&= u_{\phi \max}^2 \int_{\infty}^r \frac{r'}{R^2} \exp\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) dr' \\
&= -\frac{u_{\phi \max}^2}{2} \int_{\infty}^r -\frac{2 r'}{R^2} \exp\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) dr' \\
&= -\frac{u_{\phi \max}^2}{2} \int_{\infty}^r \frac{\partial}{\partial r'} \exp\left(1 - \frac{r'^2}{R^2}\right) dr' \\
&= -\frac{u_{\phi \max}^2}{2} \exp\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (20)
\end{aligned}$$

Als nächstes wird die linke Seite von Gleichung (18) berechnet. Wie am Anfang von Kapitel 5 beschrieben, kann die Strömung als isentrop angenommen werden. Damit gilt bezogen auf einen Referenzpunkt bei  $r \rightarrow \infty$ :

$$\varrho = \varrho_{\infty} \left( \frac{p}{p_{\infty}} \right)^{1/\gamma} \quad (21)$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{p(\infty)}^{p(r)} \frac{1}{\varrho} dp &= \int_{p(\infty)}^{p(r)} \frac{1}{\varrho_\infty} \left( \frac{p_\infty}{p} \right)^{1/\gamma} dp = \frac{p_\infty^{1/\gamma}}{\varrho_\infty} \int_{p(\infty)}^{p(r)} p^{-1/\gamma} dp \\ &= \frac{p_\infty^{1/\gamma}}{\varrho_\infty} \left[ \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + 1} p^{-\frac{1}{\gamma} + 1} \right]_{p(\infty)}^{p(r)} = \frac{p_\infty^{1/\gamma}}{\varrho_\infty} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( p(r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p(\infty)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Und damit:

$$p(r) = p_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\varrho_\infty}{p_\infty} \int_\infty^r \frac{u_\phi^2}{r'} dr' \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (23)$$

$$\varrho(r) = \varrho_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\varrho_\infty}{p_\infty} \int_\infty^r \frac{u_\phi^2}{r'} dr' \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (24)$$

Die Dichte  $p$  und der Druck  $\varrho$  für einen spezifischen Wirbel ergeben sich durch Einsetzen des Integrals (z. B. Gleichung (19) oder (20)) in die obigen Gleichungen (23) und (24) und sind exemplarisch in Abbildung 10 dargestellt.

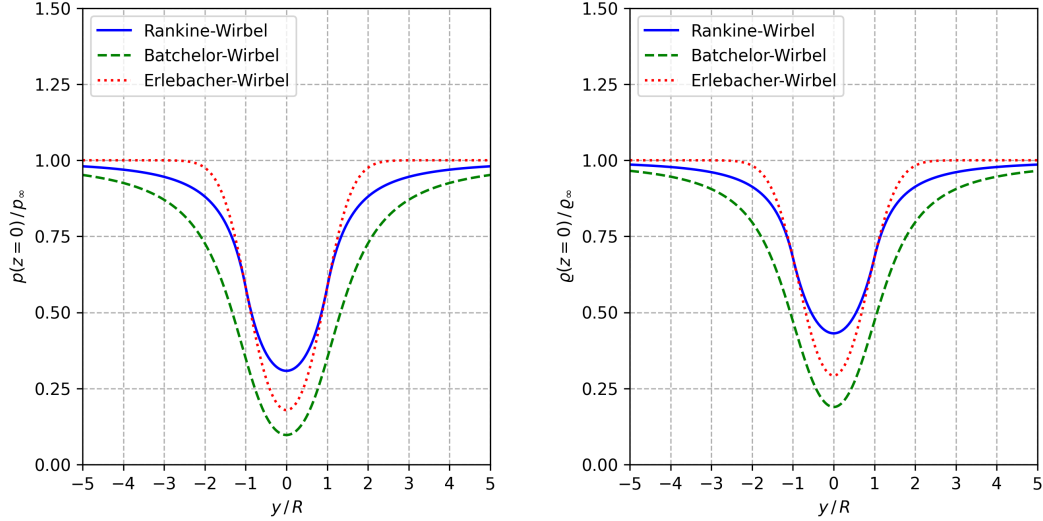


Abbildung 10: Die Druck- und Dichteprofile verschiedener Wirbelmodelle. Hier dargestellt als Schnitt entlang der  $y$ -Achse für eine exemplarische Wahl der Konstanten.

### 5.3 Berechnung von Mehr-Wirbel-Systemen

Ein Aspekt dieser Arbeit ist die Untersuchung der Interaktion zweier Wirbel. Das kombinierte Geschwindigkeitsfeld wird hierbei durch Superposition der Geschwindigkeiten der einzelnen Wirbel berechnet (siehe z. B. [31], [16]):

$$\vec{u}_{\text{ges}} = \sum_{\text{Wirbel } i} \vec{u}_i \quad (25)$$

Da sich die Einlassrandbedingung während der Simulation nicht verändert, müssen die zeitlichen Ableitungen in der Euler-Gleichung verschwinden. Dies ist durch eine Superposition des Drucks und der Dichte aus Kapitel 5.2 nicht mehr erfüllt. Somit müssen beide Felder neu berechnet werden. Der Startpunkt ist die Euler-Gleichung für stationäre Strömungen:

$$(\vec{u}_{\text{ges}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_{\text{ges}} = -\frac{1}{\varrho} \vec{\nabla} p$$

In Kombination mit der Isentropen-Relation (Gleichung 21) gilt damit für den Druck:

$$\vec{\nabla} p = \left[ -\varrho_\infty p_\infty^{-\frac{1}{\gamma}} \left( \vec{u}_{\text{ges}} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}_{\text{ges}} \right] p^{\frac{1}{\gamma}} \quad (26)$$

Die Ableitung des Drucks ist also durch eine Potenz-Funktion des Drucks gegeben. Folglich bietet sich als Lösungsansatz ebenfalls eine Potenz-Funktion an:

$$\text{Ansatz: } p(\vec{x}) = A^B(\vec{x}) \quad (27)$$

$$\implies \vec{\nabla} p = B A^{B-1} \vec{\nabla} A \quad (28)$$

Zur Bestimmung der Unbekannten  $A$  und  $B$  wird Gleichung (28) mit Gleichung (26) verglichen:

$$\implies B - 1 = B \frac{1}{\gamma} \quad (29)$$

$$\implies B = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (30)$$

$$\implies \vec{\nabla} A = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \varrho_\infty p_\infty^{-\frac{1}{\gamma}} \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u} \quad (31)$$

Damit hängt  $A$  (bzw.  $p$ ) nur noch vom Geschwindigkeitsfeld ab, das bekannt ist. Integration<sup>6</sup> von einem Punkt mit unendlichem Radius (z. B.  $y \rightarrow -\infty$ ) zu einem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  liefert:

$$\begin{aligned} A(x_0, y_0, z_0) - A_\infty &= \int_{-\infty}^{y_0} \frac{\partial}{\partial y} A(x_0, y, z_0) dy \\ &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \varrho_\infty p_\infty^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{-\infty}^{y_0} \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}(x_0, y, z_0) dy \end{aligned} \quad (32)$$

$A_\infty$  folgt dabei aus der Verschiebung der oberen Integrationsgrenze nach  $y \rightarrow -\infty$ :

$$\begin{aligned} p_\infty &= [A(y \rightarrow \infty)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[ A_\infty - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varrho_\infty p_\infty^{-\frac{1}{\gamma}} \int_{-\infty}^{-\infty} \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}(x_0, y, z_0) dy \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= A_\infty^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \iff A_\infty &= p_\infty^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \end{aligned} \quad (33)$$

und man erhält für die Druckverteilung:

$$p(x_0, y_0, z_0) = p_\infty \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\varrho_\infty}{p_\infty} \int_{-\infty}^{y_0} \left( \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{u}(x_0, y, z_0) dy \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (34)$$

Für ein bekanntes Geschwindigkeitsfeld können so zunächst die Ableitung dieses Feldes (analytisch, siehe Anhang D) und dann das Integral (numerisch) bestimmt werden. Da eine numerische Integration aus dem Unendlichen nicht möglich ist, wird ein Startpunkt mit großem aber endlichem Radius verwendet (hier:  $25 R$ ).

## 5.4 Theoretische Berechnung von Swirl-Raten

Die Swirl-Rate  $s$ , definiert als das Verhältnis aus maximaler Azimutalgeschwindigkeit und Axialgeschwindigkeit auf der Rotationsachse, ist ein oft verwendetes Maß für die Stabilität eines Wirbels (siehe z. B. [7, 14, 42]):

$$s := \frac{\max_r |u_\phi|}{u_x(r=0)} \quad (5)$$

<sup>6</sup>Der Pfad in der  $y$ - $z$ -Ebene spielt keine Rolle, da  $\vec{\nabla} A$  nach Definition mathematisch konservativ ist.

Da sich die Strömungsbedingungen im hier verwendeten konischen Rohr entlang des Rohres verändern, verändert sich auch die Swirl-Rate. Der Wert, der auf der Einlass-Randbedingung vorgegeben ist, entspricht also nicht notwendigerweise dem Wert am Punkt eines Wirbelplatzens. Er kann dann auch nicht unmittelbar aus Experimenten oder Simulationsergebnissen bestimmt werden, da die axiale Geschwindigkeit am Aufplatzzpunkt auf null abfällt und die Swirl-Rate somit beliebig groß wird.

In diesem Kapitel wird der Verlauf der Swirl-Rate entlang des Rohres für einen einzelnen Wirbel theoretisch hergeleitet. Der Verlauf der axialen Geschwindigkeit wurde bereits von Hall beschrieben [15] (vgl. Kapitel 4.2), allerdings nur für inkompressible Strömungen. Daher soll sein Ansatz nachfolgend um kompressible Effekte erweitert werden. Analog zu den Überlegungen von Hall wird dabei stets von einem stabilen Wirbel ausgegangen, auch wenn er für die gewählten Parameter bereits instabil wäre. Das bedeutet insbesondere, dass der Wirbel achsensymmetrisch und stationär ist.

Zuerst wird die maximale Azimutalgeschwindigkeit berechnet. Nach dem ersten Helmholtz'schen Wirbelsatz gilt für die Zirkulation  $\Gamma$  in einer Wirbelröhre mit Querschnittsfläche  $A(x)$  [34]:

$$\Gamma(x) = \oint_{\partial A(x)} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \text{konst.} \quad (35)$$

Für den Rand  $\partial A$  der Querschnittsfläche wird ein Kreis mit Radius  $r_A$  gewählt, dessen Mittelpunkt auf der Rotationsachse ( $x$ -Achse) liegt. Dann entspricht die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Wegelement  $\vec{s}$  genau der Azimutalgeschwindigkeit des Wirbels. Es gilt also für zwei Querschnittsflächen der Wirbelröhre mit  $x$ -Koordinaten  $x_0$  (Rohranfang) und  $x$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A(x_0)} u_\phi(r_A(x_0), x_0) ds &= \oint_{\partial A(x)} u_\phi(r_A(x), x) ds \\ \iff 2\pi r_A(x_0) u_\phi(r_A(x_0), x_0) &= 2\pi r_A(x) u_\phi(r_A(x), x) \end{aligned} \quad (36)$$

Für die Form der Wirbelröhre  $r_A(x)$  wird angenommen, dass ein Bündel von Stromlinien, die am Rohranfang äquidistant sind, im gesamten Rohrverlauf äquidistant bleiben. Damit ergibt sich das folgende Verhältnis:

$$\frac{r_A(x_0)}{r_A(x)} = \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} \quad (37)$$

Einsetzen in Gleichung (36) liefert damit für den Verlauf der azimutalen Geschwindigkeit:

$$u_\phi(r(x), x) = \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} u_\phi(r(x_0), x_0) \quad (38)$$

Da das Verhältnis der Rohrradien nicht von  $r$  abhängt, gilt insbesondere auch:

$$u_{\phi \text{ max}}(x) = \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} u_{\phi \text{ max}}(x_0) \quad (39)$$

Als nächstes wird die axiale Geschwindigkeit auf der Rotationsachse ( $r = 0$ ) berechnet. Hier ist zu beachten, dass der Druckanstieg in  $x$ -Richtung einen verstärkten Einfluss auf den Wirbelkern hat. Auch hier wird die Überlegung von Hall [15] für den Fall reibungsfreier kompressibler Fluide erweitert:

In Zylinderkoordinaten nimmt die radiale Komponente der Euler-Gleichung die folgende Form an:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\phi^2}{r} \quad (40)$$

Unter der Annahme einer nicht-aufgeplatzten Strömung bleibt der Wirbel rotationssymmetrisch. Damit verschwindet die Radialgeschwindigkeit auf der Rotationsachse und es ergibt sich die folgende (bereits bekannte) Gleichung:

$$\int_{p(r \rightarrow \infty)}^{p(r=0)} \frac{1}{\rho} dp = \int_{\infty}^0 \frac{u_\phi^2}{r'} dr' \quad (18)$$



Die Lösung dieser Gleichung wurde ebenfalls bereits hergeleitet (siehe Kapitel 5.2). Für das Verhältnis aus Druck und Dichte gilt damit nach Gleichungen (23) und (24):

$$\begin{aligned}\frac{p(0, x)}{\varrho(0, x)} &= \frac{p(\infty, x)}{\varrho(\infty, x)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x)}{r'} dr' \\ &= \frac{p(\infty, x)}{\varrho(\infty, x)} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x_0)}{r'} dr' \left( \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} \right)^2\end{aligned}\quad (41)$$

Der Druck bei unendlichem Radius ist nur für die Strömung am Einlass ( $x = x_0$ ) bekannt. Daher soll im Folgenden für  $p(\infty, x)$  und  $\varrho(\infty, x)$  der genäherte Druck- bzw. Dichteverlauf für eine Strömung ohne Wirbel (vgl. Kapitel 5.1) verwendet werden.

Für das Integral können je nach gewählter Wirbelform die Gleichungen (19) bzw. (20) eingesetzt werden. Für  $r = 0$  nehmen diese die folgenden Formen an:

$$\text{Batchelor-Wirbel:} \quad \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x_0)}{r'} dr' = -\frac{\ln(2)}{\xi^2} u_{\phi_{\text{max}}}^2(x_0) \quad (42)$$

$$\text{Erlebacher-Wirbel:} \quad \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x_0)}{r'} dr' = -\frac{e}{2} u_{\phi_{\text{max}}}^2(x_0) \quad (43)$$

Damit kann schließlich der Verlauf der axialen Geschwindigkeit  $u_x$  entlang der Rotationsachse ( $r = 0$ ) berechnet werden. Nach der Euler-Gleichung in Zylinderkoordinaten gilt:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_x = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (44)$$

Unter der Annahme, dass der Wirbel nicht aufplatzt, ist die Wirbelströmung sowohl stationär als auch rotationssymmetrisch. Damit verschwinden die explizite Zeitableitung sowie die Radialgeschwindigkeit auf der  $x$ -Achse und die Ableitung nach  $\phi$ . Es bleibt:

$$\begin{aligned}u_x(0, x) \frac{\partial u_x(0, x)}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho(0, x)} \frac{\partial p(0, x)}{\partial x} && | \text{ isentrope Strömung} \\ \iff \frac{1}{2} \frac{\partial u_x^2(0, x)}{\partial x} &= -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{p(0, x)}{\varrho(0, x)} \right] \\ \iff u_x^2(0, x) - u_x^2(0, x_0) &= -\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p(0, x)}{\varrho(0, x)} - \frac{p(0, x_0)}{\varrho(0, x_0)} \right) \\ \iff u_x^2(0, x) &= u_x^2(0, x_0) - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p(\infty, x)}{\varrho(\infty, x)} - \frac{p(\infty, x_0)}{\varrho(\infty, x_0)} \right) \\ &\quad - 2 \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x_0)}{r'} dr' \left[ \left( \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} \right)^2 - 1 \right]\end{aligned}\quad (45)$$

Damit erhält man schließlich für die theoretische Swirl-Rate eines nicht-platzenden Wirbels:

$$\begin{aligned}s(x) &= \frac{\max_r |u_{\phi}(r, x)|}{u_x(0, x)} \\ &= \frac{\frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} u_{\phi_{\text{max}}}(x_0)}{\sqrt{u_x^2(0, x_0) - \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p(\infty, x)}{\varrho(\infty, x)} - \frac{p(\infty, x_0)}{\varrho(\infty, x_0)} \right) - 2 \int_{\infty}^0 \frac{u_{\phi}^2(r', x_0)}{r'} dr' \left[ \left( \frac{R_{\text{Rohr}}(x_0)}{R_{\text{Rohr}}(x)} \right)^2 - 1 \right]}}\end{aligned}\quad (46)$$

Hierbei ist die Form des Wirbels in der Lösung des Integrals nach Gleichung (42) bzw. (43) enthalten und  $p(\infty, x) / \varrho(\infty, x)$  folgt aus den Überlegungen für eine Strömung ohne Wirbel in Kapitel 5.1.

## 6 Numerische Simulationen mit dem TAU-Code

Alle Simulationen in dieser Arbeit werden mit dem TAU-Code des DLRs durchgeführt. Dieses von der DLR-Abteilung C<sup>2</sup>A<sup>2</sup>S<sup>2</sup>E des Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik entwickelte Programmpaket enthält zahlreiche Methoden und Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen für sowohl reibungsfreie als auch reibungsbehaftete Strömungen und ist viel zu umfangreich, um im Rahmen dieser Arbeit vollständig beschrieben zu werden. Dennoch sollen im Folgenden zumindest die Grundlagen der für diese Arbeit verwendeten Simulationsmethoden erklärt werden. Für eine detailliertere Beschreibung siehe [2].

### 6.1 Finite Volumen

Der TAU-Code verwendet für die numerische Lösung aller implementierten Bewegungsgleichungen ein „finite-Volumen-Verfahren“. Dafür werden zuerst das Strömungsgebiet in regelmäßige oder unregelmäßige Volumenelemente aufgeteilt und dann alle relevanten Größen über die Volumina integriert. Nach dem Gauß’schen Integralsatz verschwinden dabei alle räumlichen Ableitungen. Das soll im Folgenden an Hand der Euler-Gleichung demonstriert werden:

$$\begin{aligned}
 & \varrho \partial_t \vec{u} + \varrho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p \\
 \iff & \partial_t(\varrho \vec{u}) - \vec{u} \partial_t \varrho + \varrho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad | \text{Kontinuitätsgl.} \\
 \iff & \partial_t(\varrho \vec{u}) + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{u})) + (\varrho \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p \quad (47)
 \end{aligned}$$

Nun kann über das Volumen integriert werden, wobei der Gauß’sche Integralsatz und die erste Green’sche Identität verwendet werden, um Volumenintegrale über  $V$  in Oberflächenintegrale über  $A = \partial V$  umzuwandeln. Dabei ist  $\vec{n}$  ein Einheitsvektor senkrecht zu  $A$  und zeigt nach Konvention aus dem Volumen heraus:

$$\begin{aligned}
 & \int \partial_t(\varrho \vec{u}) dV = - \oint p \vec{n} dA - \oint (\varrho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} dA \quad | \times \frac{1}{V} \\
 \iff & \partial_t \frac{1}{V} \int (\varrho \vec{u}) dV = - \frac{1}{V} \oint p \vec{n} + (\varrho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n} dA \\
 \iff & \partial_t \langle \varrho \vec{u} \rangle_V = \frac{1}{V} \sum_i A_i [-\langle p \rangle_{A_i} \vec{n}_i - \langle (\varrho \vec{u}) \vec{u} \cdot \vec{n}_i \rangle_{A_i}] \quad (48)
 \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen die spitzen Klammern den Mittelwert über das Volumen ( $\langle \cdot \rangle_V$ ) bzw. die  $i$ -te Seitenfläche des Volumens ( $\langle \cdot \rangle_{A_i}$ ). Somit kann die zeitliche Veränderung des mittleren Impulses im Volumen als die Summe der Flüsse durch seine Seitenflächen berechnet werden. Ähnliche Gleichungen ergeben sich für die Dichte und die innere Energie.

Die Volumina werden vom TAU-Code auf Basis der Gitterpunkte generiert, wobei für die Optimierung der Rechenzeiten für die Simulationen auch mehrere, unterschiedlich feine Aufteilungen erstellt werden können (für Details siehe [2]). Kontinuität ist dadurch gegeben, dass der Fluss durch eine Seitenfläche eines Volumens dem negativen Fluss durch dieselbe Seitenfläche des Nachbarvolumens entspricht. Für die zeitliche Entwicklung wird ein explizites Runge-Kutta-Verfahren verwendet, Ableitungen werden über finite Differenzen zwischen benachbarten Kontrollvolumina berechnet. Zusätzlich wird zwischen zwei grundsätzlichen Problemstellungen unterschieden:

#### a) Stationäre Probleme:

Bei Simulationen mit dieser Einstellung geht der TAU-Code davon aus, dass für die vorliegende Problemstellung eine stationäre Lösung existiert, also dass die zeitlichen Ableitungen aller relevanten Größen auf Dauer gegen Null konvergieren. In diesem Fall wird die Konvergenz dieser Größen durch mehrere Maßnahmen beschleunigt; allerdings kann nur für das Endergebnis garantiert werden, dass es physikalisch korrekt ist [2]. Die Zwischenschritte stellen in der Regel keine Lösung der Bewegungsgleichungen dar. Unter anderem wird nicht

im ganzen Simulationsbereich mit dem gleichen Zeitschritt gerechnet, sondern für jeden Gitterpunkt mit dem größtmöglichen lokalen Zeitschritt. Die Entwicklung der Strömung kann also an jedem Gitterpunkt mit unterschiedlichen und beständig wechselnden Zeitintervallen berechnet werden. Zusätzlich werden die so berechneten Veränderungen nach jedem Schritt geglättet und die Auflösung des Gitters mit Hilfe eines sogenannten Multigrid-Verfahrens zwischenzeitlich reduziert. Die Simulation endet, wenn die zeitlichen Ableitungen der relevanten Strömungsgrößen für alle Gitterpunkte unter einen vorgegebenen Schwellenwert gefallen sind.

#### b) Instationäre Probleme:

Bei Simulationen mit dieser Einstellung werden alle Gitterpunkte mit dem größten Zeitschritt entwickelt, der für alle Gitterpunkte eine stabile Simulation ermöglicht. Damit können in regelmäßigen zeitlichen Abständen Schnappschüsse der Simulation erzeugt werden, die die tatsächliche zeitliche Entwicklung widerspiegeln.

Beide Verfahren (a und b) kommen in dieser Arbeit zum Einsatz. Im Fall der hier betrachteten Wirbelströmungen ist zu erwarten, dass Strömungen, in denen die Wirbel nicht aufplatzen, eine stationäre Lösung haben. Aufplatzen nach dem Doppelhelix- oder Spiraltyp dagegen liefert unregelmäßige und instationäre Strukturen, eine stationäre Simulation wird also nicht konvergieren. Im Falle eines achsensymmetrischen Aufplatzen ist eine stationäre Lösung möglich, sofern die Strömung dabei nicht turbulent wird.

## 6.2 Gittererstellung und Auflösung

Die Unterteilung des Simulationsbereichs in Volumenelemente und zugehörige Gitterpunkte ist nicht im Funktionsumfang des TAU-Codes enthalten. Hierfür kommen zwei Programme der Firma CentaurSoft [1] zum Einsatz:

Im ersten Schritt wird die Geometrie des Simulationsbereichs (alle Wände / festen Objekte) festgelegt. Dazu wird das CAD-Programm „GeoCreate™ 6.0“ verwendet.

Im zweiten Schritt wird die Geometrie mit einem Gitter versehen. Hierfür bietet das Programm „GENTAUR™ 14.1.1.1“ zahlreiche Einstellmöglichkeiten, um die Form der Volumina (Tetraeder, Hexaeder, Pyramiden, Prismen) und ihre ungefähre Größe zu bestimmen. Für diese Arbeit wurde in der Mitte des Rohres ( $y, z \in [-1 \text{ m}, 1 \text{ m}]$ ) ein regelmäßiges quaderförmiges Gitter gewählt, um die Auflösung der Wirbel genau steuern zu können.

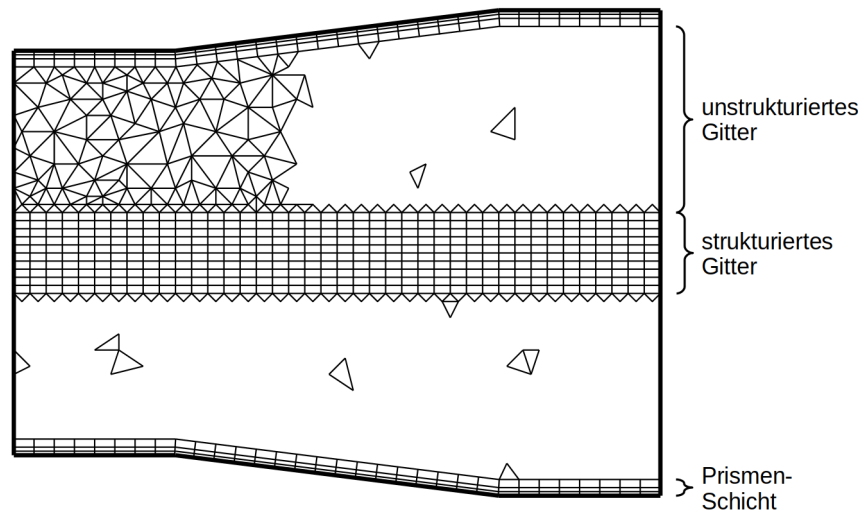


Abbildung 11: Qualitative Darstellung eines Schnitts durch das verwendete Gitter: In der Mitte des Simulationsbereichs befindet sich ein Bereich aus regelmäßigen Quadraten, an den Außenwänden mehrere Schichten aus Prismen, und dazwischen unregelmäßige Tetraeder (hier nur angedeutet).

An den Außenwänden wurden mehrere Prismen-Schichten erzeugt, um die Randbedingungen gut auflösen zu können. Der Bereich zwischen den Prismen und den Quadern wurde mit unstrukturierten Tetraedern gefüllt, um möglichst wenige zusätzliche Punkte zu verwenden. Diese Aufteilung ist qualitativ in Abbildung 11 dargestellt, Abbildung 12 zeigt das tatsächlich verwendete Gitter.

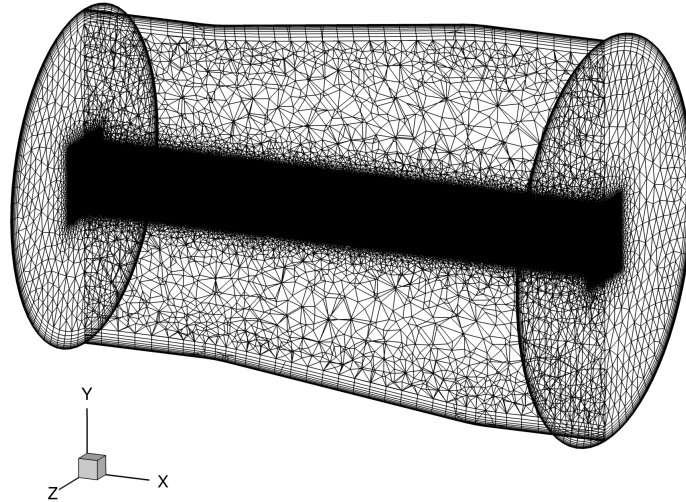


Abbildung 12: Quantitative Darstellung des verwendeten Gitters. Die Mitte des Simulationsbereichs wird aufgrund der hohen Punktdichte, die in dieser Abbildung nicht feiner aufgelöst werden kann, schwarz dargestellt. Die Stirnflächen zeigen repräsentativ die Gestalt des Gitters im Inneren des Rohres. (Erstellt mit Tecplot 360.)

Zur Bestimmung geeigneter Auflösungen für die einzelnen Bereiche wurden mehrere Tests durchgeführt: Zunächst wurde die Dicke und Anzahl der Prismen an den Rohrwänden variiert. Hier reagiert der TAU-Code sehr empfindlich und eine unzureichende Anzahl oder falsche Verteilung der Dicken kann die Simulation zum Absturz bringen. Nach intensiven Tests wurde eine Konfiguration mit 10 wandparallelen Schichten gefunden, die keine Stabilitätsprobleme aufweist.

Als nächstes wurde der hoch-aufgelöste Bereich im Zentrum festgelegt, der den Wirbel beinhalten soll. Die Auflösung in  $y$ - und  $z$ -Richtung bestimmt dabei die Repräsentation der Wirbelprofile (vgl. Abbildung 4). Die  $x$ -Auflösung ist insbesondere im Falle eines Wirbelplatzens entscheidend, da in diesem Fall die  $x$ -Geschwindigkeit auf null fällt und die sprunghafte Veränderung der Strömung in  $x$ -Richtung gut aufgelöst werden muss. Zudem werden durch eine hohe  $x$ -Auflösung Rückwirkungen der Auslassrandbedingung auf das Simulationsgebiet minimiert.

Für die nötigen Konvergenztests wurde eine Reihe an Untersuchungen mit einem einzelnen Batchelor-Wirbel ( $R = 0,4 \text{ m}$ ,  $s = 0,4$ ,  $\Delta u_{x \max} = 0$ ) durchgeführt. Damit wurde eine geeignete Auflösung für den zentralen Simulationsbereich von  $\delta x = 0,02 \text{ m}$  und  $\delta y = \delta z = 0,01 \text{ m}$  bestimmt, das entspricht 32 Mio. Gitterpunkten. Der gesamte Simulationsbereich umfasst knapp 35 Mio. Gitterpunkte.

### 6.3 Anfangsbedingungen

Der TAU-Code initialisiert alle Gitterpunkte, die nicht durch eine Randbedingung festgelegt sind, mit einem Satz an Referenzwerten. Diese entsprechen aufgrund der gewählten Randbedingungen („farfield“) den Strömungsbedingungen am Rohrende. Somit beginnt die Simulation damit, dass die Strömungsbedingungen auf den Gitterpunkten am Rohreinlass durch die Einlassrandbedingung vorgegeben sind und die Strömungsbedingungen auf den Gitterpunkten direkt daneben durch die Bedingungen am Rohrende. Diese sind im vorliegenden Fall eines konischen Rohrs allerdings deutlich verschieden.

In ersten Tests sorgte dieser Sprung in Druck, Dichte und Geschwindigkeit für einer Reihe von Stoßwellen, die direkt nach dem Start der Simulation stromabwärts durch den Simulationsbereich propagierten. Da die gewählte Randbedingung am Rohrende nicht auf Stoßwellen ausgelegt ist, konnten die Stoßwellen das Rohr nicht vollständig verlassen. Stattdessen wurden sie teilweise reflektiert und liefen stromaufwärts weiter, wo sie mit nachfolgenden Wellen kollidierten. Das Resultat war im besten Fall eine sehr langsame Konvergenz zur tatsächlichen Lösung und im schlimmsten Fall ein Absturz des Programms.

Zur Lösung des Problems wurde der Python-Code, der die Einlassrandbedingung berechnet, um einen Programmteil erweitert. Dieser nimmt die bereits berechnete Randbedingung und kombiniert sie linear mit der vom TAU-Code vorgegebenen Anfangsbedingung im Rohr [2]. Dabei muss nicht der gesamte Simulationsbereich angepasst werden. Tests haben gezeigt, dass die Bildung von Stößen bereits verhindert wird, wenn die Strömungsfelder nur in einer 2 m langen Zone am Rohranfang geglättet werden. Angesichts mehrerer Millionen Gitterpunkte im Simulationsbereich können dadurch bis zu 80% der Rechenzeit für eine Anfangsbedingung eingespart werden. Für eine beliebige Größe  $f$  gilt:

$$f_{\text{Anfangsbed.}}(x^*, y, z) = \begin{cases} \frac{a-x^*}{a} f_{\text{Randbed.}}(y, z) + \frac{x^*}{a} f_{\text{Referenz}}(x^*, y, z) & x^* \leq a \\ f_{\text{Referenz}}(x^*, y, z) & x^* > a \end{cases} \quad (49)$$

Dabei ist  $x^* = x - x_0$  der Abstand in  $x$ -Richtung zur Randbedingung und  $a$  die Breite des Überlagerungsbereichs (vgl. Abbildung 13).

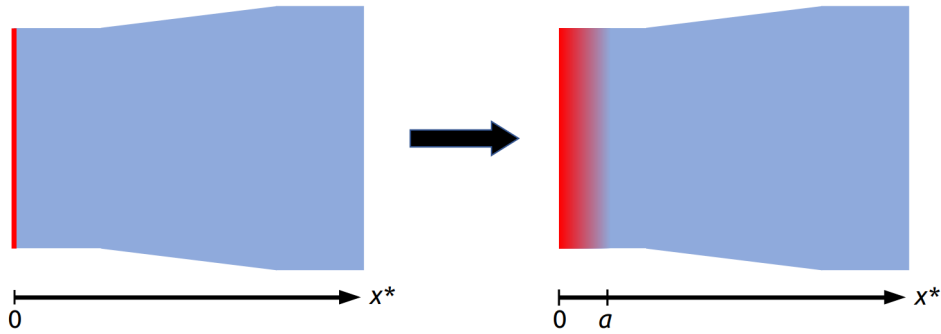


Abbildung 13: Schematische Darstellung der nötigen Modifikationen an der Anfangsbedingung. Da die vorgegebene Randbedingung bei  $x^* = 0$  (rot) nicht zu den vom TAU-Code vorgegebenen Anfangswerten im Volumen (blau) passt, muss vor Simulationsstart eine Übergangszone ( $x^* = 0$  bis  $x^* = a$ ) erzeugt werden.

## 7 Analyse der numerischen Ergebnisse

Im Rahmen dieses Kapitels sollen zunächst die numerischen Resultate für einen einzelnen Wirbel anhand von experimentellen Beobachtungen aus der Literatur validiert werden. Danach wird die Stabilität der beiden betrachteten Wirbelformen in Abhängigkeit von unterschiedlichen Wirbelparametern auf Basis der Simulationsergebnisse und theoretischer Betrachtungen analysiert. Zuletzt wird exemplarisch untersucht, inwieweit das Aufplatzverhalten eines Wirbels durch die Interaktion mit einem zweiten, schwächeren Wirbel gesteuert werden kann.

Alle numerischen Simulationen, die nachfolgend ausgewertet werden, verwenden die folgenden Werte für die Berechnung der Anfangsbedingung (vgl. Kapitel 5.2):

$$u_\infty = 165,644 \text{ m/s} = \frac{1}{2} c_s$$

$$p = 101325 \text{ Pa}$$

$$\varrho = 1,29251 \text{ kg/m}^3$$

Diese Werte werden dann auf der Einlassrandbedingung für die Erzeugung von Wirbeln entsprechend modifiziert. Am Rohrende ergeben sich nach Gleichungen (13), (14) und (15) für die Fernfeldrandbedingung die folgenden Werte:

$$u_x = 107,090 \text{ m/s}$$

$$p = 112029,7 \text{ Pa}$$

$$\varrho = 1,388355 \text{ kg/m}^3$$

Ohne eine Modifikation der Strömung, also ohne aufgeprägten Wirbel, ergeben sich damit die folgenden Verteilungen für die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  und die Dichte  $\varrho$ :

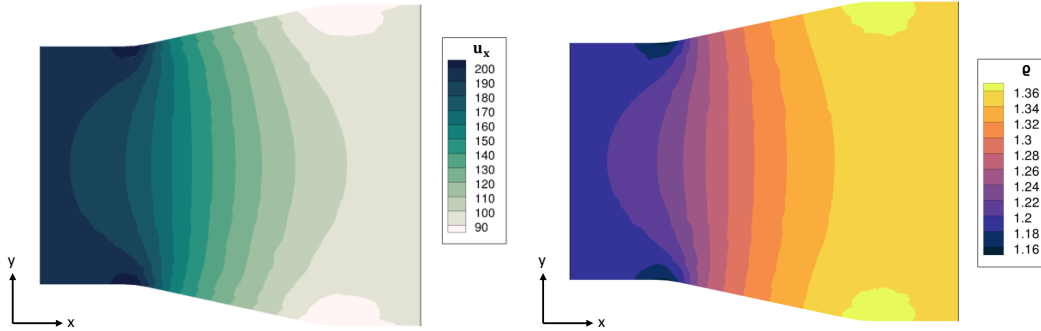


Abbildung 14: Das axiale Geschwindigkeitsfeld (links) und die Dichte (rechts) in der ( $z=0$ )-Ebene ohne Wirbel.

In Abbildung 14 ist klar zu erkennen, dass die Veränderung der Strömung abhängig vom Radius unterschiedlich schnell erfolgt. Die Segmente mit konstantem Radius sind notwendig, um die Strömungsbedingungen an Ein- und Auslassrandbedingung etwas gleichmäßiger zu gestalten.

Das Koordinatensystem wird für die Auswertung wie folgt festgelegt: Der Koordinatenursprung liegt in der Mitte des Simulationsbereichs. Der Rohranfang hat damit die  $x$ -Koordinate  $x_0 = -8 \text{ m}$  und das Rohrende  $x_E = 8 \text{ m}$ . Der konische Bereich befindet sich im  $x$ -Intervall  $[-4 \text{ m}, 4 \text{ m}]$ .

Die beiden Wirbeldefinitionen (1) und (2) enthalten drei Wirbelparameter: Die maximale azimuthale Geschwindigkeit  $u_{\phi \max}$ , die maximale Abweichung von der Umgebungsströmung in  $x$ -Richtung  $\Delta u_{x \max}$  und den Radius des Wirbelkerns  $R$ . Während  $u_{\phi \max}$  und  $\Delta u_{x \max}$  in unterschiedlichen Simulationen verschieden sein können, wird für den Wirbelkernradius stets ein Wert von  $R = 0,4 \text{ m}$  verwendet.

Eine Übersicht über alle im Rahmen dieser Arbeit ausgewerteten Simulationen und die zugehörigen Parameter findet sich in Anhang E.

## 7.1 Reproduktion experimenteller Beobachtungen

Bevor die Ergebnisse der numerischen Simulationen verwendet werden können, müssen sie zumindest exemplarisch validiert werden. Dazu wird ein Batchelor-Wirbel mit den Parametern  $R = 0,4 \text{ m}$ ,  $u_{\phi \text{ max}} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \text{ max}} = 0$  betrachtet. Dieser zeigt in der Simulation ein deutliches Aufplatzverhalten; die Form des Wirbels ist in Abbildung 15 als blau eingefärbte  $\lambda_2$ -Isofläche zu sehen. Zur näheren Untersuchung des Wirbels ist es hilfreich, einen Schnitt parallel zur  $x$ -Achse durch den Wirbel zu legen. Die Position dieses Schnittes ist in Abbildung 15 als graue Fläche eingezeichnet.

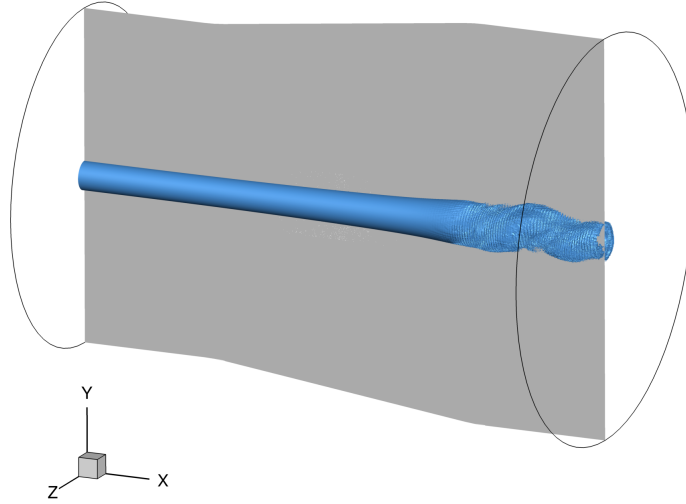


Abbildung 15: Veranschaulichung der Schnittebene (grau) durch die Rotationsachse des Wirbels, der hier als  $\lambda_2$ -Isofläche (blau) dargestellt ist. (Erstellt mit Tecplot 360.)

Für den hier betrachteten Batchelor-Wirbel sind die Geschwindigkeiten in der Schnittebene<sup>7</sup> in Abbildung 16 sowie der Druck und die Dichte in Abbildung 17 dargestellt.

- Die  $x$ -Geschwindigkeit  $u_x$  ist parallel zur Umgebungsströmung  $u_{\infty}$  und zeigt die Verlangsamung der Strömung durch den axialen Druckgradienten. Nach Definition platzt der Wirbel auf, sobald sich ein Staupunkt auf oder nahe der Rotationsachse des Wirbels bildet; das entspricht dem Punkt mit minimaler  $x$ -Koordinate, an dem  $u_x$  verschwindet. In Abbildung 16 ist das bei  $x_p = -0,9 \text{ m}$  (oben), weiter stromabwärts erreicht  $u_x$  sogar negative Werte. Damit kann von einem Aufplatzen des Wirbels ausgegangen werden.
- Die  $y$ -Geschwindigkeit  $u_y$  liegt in der gewählten Schnittebene und entspricht hier der Radialgeschwindigkeit  $u_r$ . Diese ist nach Definition der verwendeten Wirbel am Rohranfang null; signifikante Werte für  $u_y$  zeigen daher, dass sich die Form des Wirbels deutlich gegenüber der ursprünglichen Form oder Lage verändert hat. In Abbildung 16 (Mitte) finden sich erst kurz hinter dem Aufplatzen (vgl.  $u_x$ ) deutlich von null verschiedene Werte.
- Die  $z$ -Geschwindigkeit  $u_z$  steht senkrecht auf der gewählten Schnittebene und entspricht damit der Azimutalgeschwindigkeit  $u_{\phi}$ . Der Abstand in  $y$ -Richtung zwischen Maxima und Minima entspricht in etwa dem Durchmesser des Wirbelkerns und kann damit Maßstab für die Entwicklung des Kernradius  $R$  verwendet werden. In Abbildung 16 (unten) kann der Wirbelkern vor dem Aufplatzen (linke Hälfte des Bildes) deutlich identifiziert werden, verliert aber durch das Aufplatzen seine ursprüngliche Struktur.

<sup>7</sup>Die in diesem Kapitel aufgeführten Simulationen wurden alle mit der in Abbildung 9 dargestellten Rohrgeometrie erstellt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird aber bedarfsweise nur ein Ausschnitt aus dem Rohrrinneren dargestellt.

- Die Dichte  $\rho$  und der Druck  $p$  hängen nach Gleichung (13) direkt voneinander ab und sind somit keine unabhängigen Größen. Beide nehmen aufgrund von Zentrifugalkräften im Kern eines Wirbels stark ab (vgl. Gleichungen (23), (24)) und können daher ebenso als Indikator für die Position des Wirbelkerns verwendet werden. In Abbildung 17 können drei kreisförmige Strukturen hinter dem Aufplatzen beobachtet werden. Das deutet auf ein Aufplatzen nach dem Spiraltyp hin, was im Folgenden weiter untersucht wird.

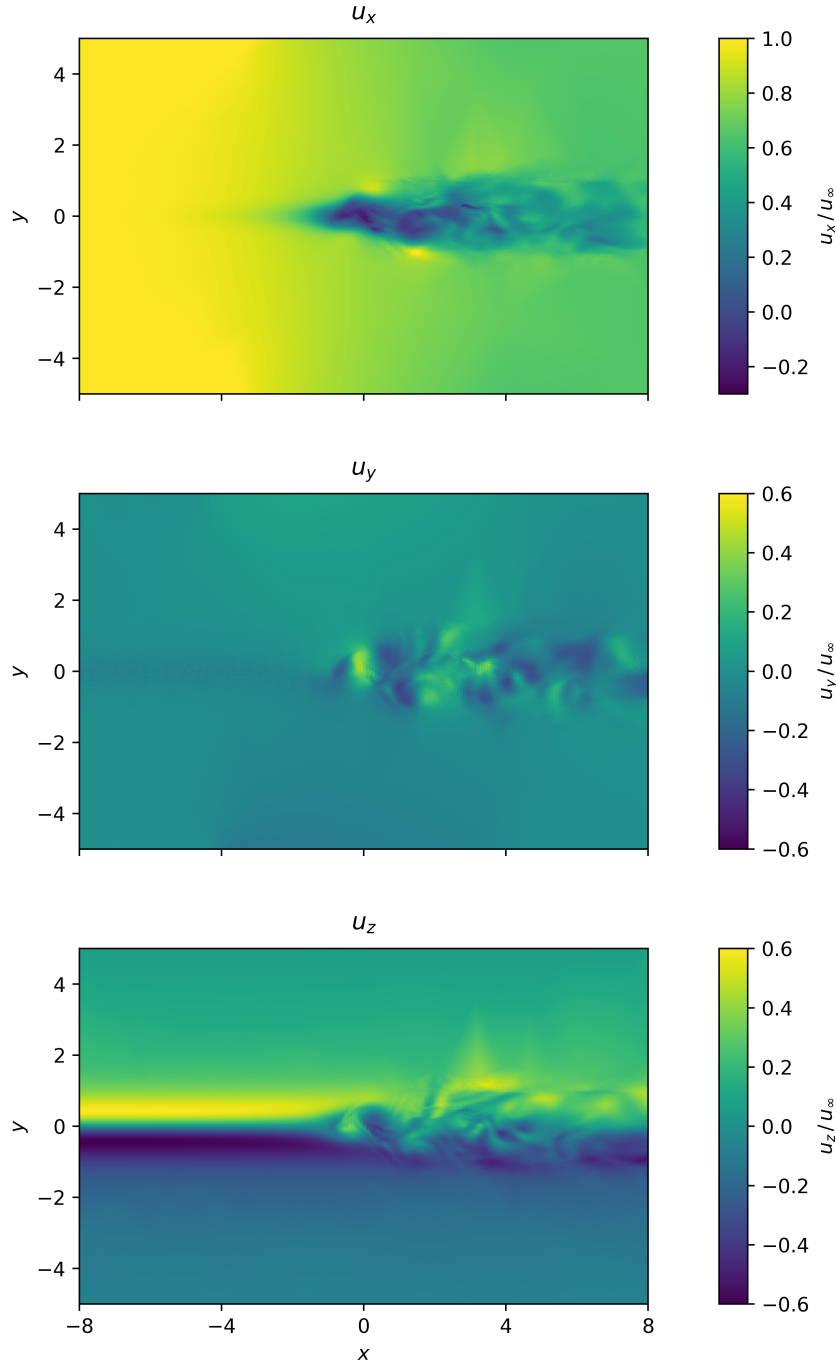


Abbildung 16: Die Geschwindigkeitskomponenten eines Batchelor-Wirbels mit Wirbelparametern  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$  in einem Schnitt durch das Strömungsfeld bei  $z = 0$  (vgl. auch Abbildung 15). Das Aufplatzen bei  $x = -0,9$  m führt zu großen Veränderungen in allen drei Komponenten.



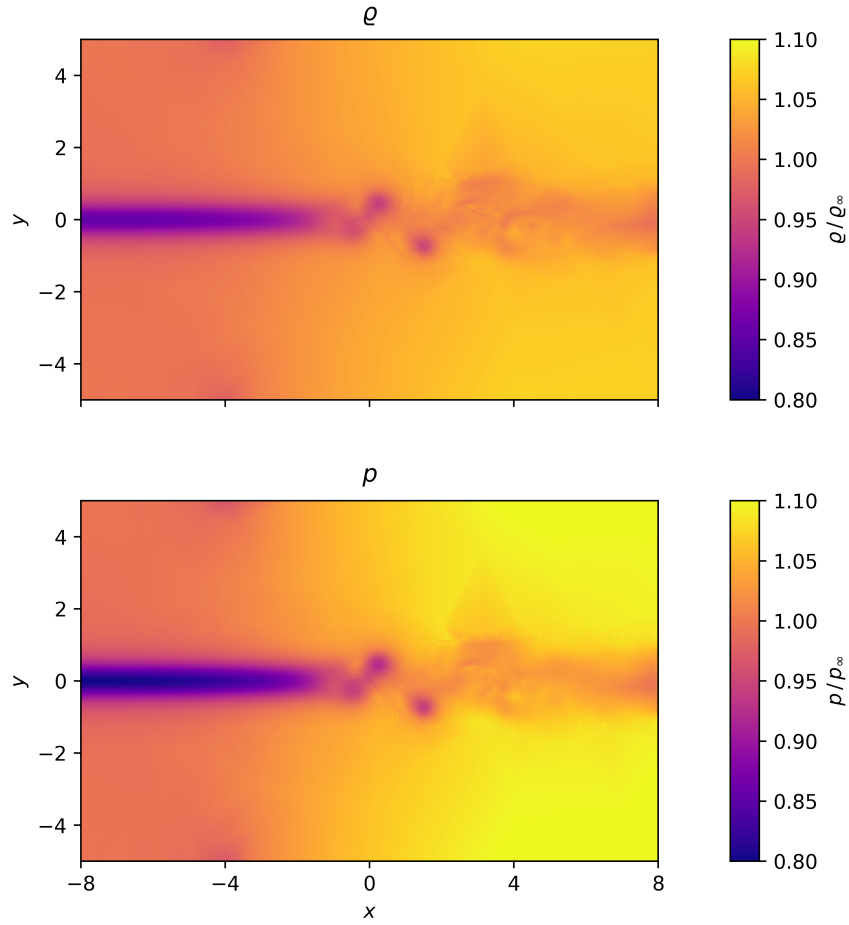


Abbildung 17: Die Dichte und der Druck eines Batchelor-Wirbels mit Wirbelparametern  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$  in einem Schnitt durch das Strömungsfeld bei  $z = 0$  (vgl. auch Abbildung 15). Hinter dem Aufplatzzpunkt bei  $x = -0,9$  m sind drei kreisförmige Durchgänge zu sehen, die auf ein Aufplatzen nach dem Spiraltyp hinweisen.

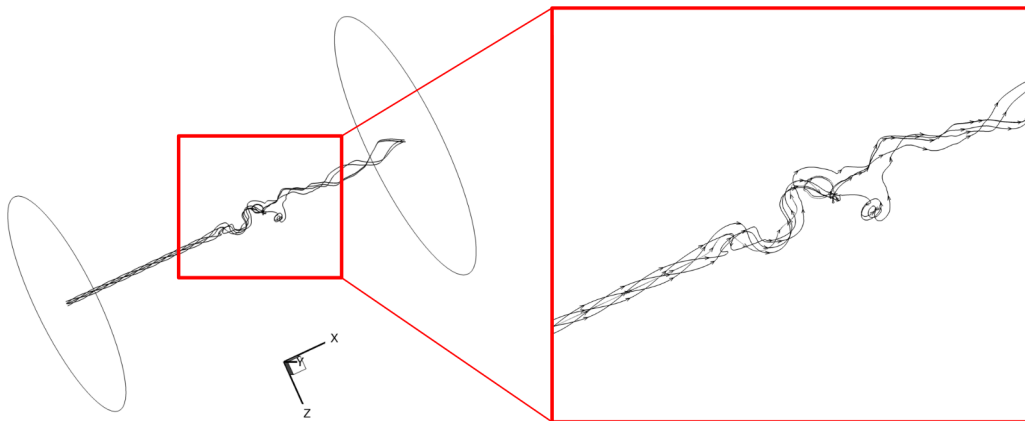


Abbildung 18: Einige Stromlinien im Kern des aufplatzenden Batchelor-Wirbels mit  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$ . Die Umgebung des Aufplatzzpunkts ist rechts vergrößert dargestellt. (Erstellt mit Tecplot 360)

Mit dem Ergebnis, dass es sich bei dem in der Simulation beobachteten Verhalten um ein Wirbelplatzen handelt, ist als nächstes zu klären, welcher Typ des Aufplatzens vorliegt. Dazu wird eine weitere Darstellungsform gewählt: Ausgehend von Startpunkten auf der Einlassebene in einem Abstand von 0,1 m zur Rotationsachse werden Stromlinien berechnet, die dem Verlauf des Wirbels folgen und mit experimentellen Visualisierungen wie in Kapitel 4.1 verglichen werden. Ein Vergleich von Abbildung 18 mit dem von Leibovich [24] fotografierten Spiraltyp zeigt eine gute phänomenologische Übereinstimmung. Insbesondere das charakteristische Abknicken des Wirbelkerns ist gut zu erkennen.

Die experimentell ermittelte räumliche Struktur eines aufplatzenden Wirbels nach dem Spiraltyp ist auch bei Lambourne [22] zu finden. Auch hier gibt es eine gute Übereinstimmung zwischen den experimentellen Beobachtungen (vgl. Abbildung 19) und dem für diese Arbeit simulierten Wirbelplatzen.

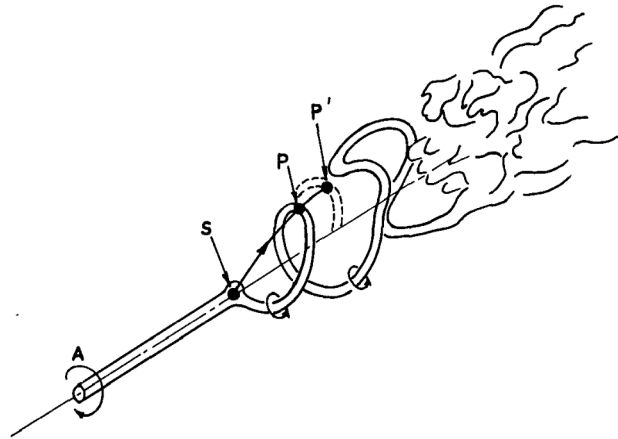


Abbildung 19: Schematische Darstellung des Wirbelplatzens nach dem Spiraltyp, basierend auf experimentellen Beobachtungen. (Entnommen aus [22])

Ein Thema anhaltender Diskussion ist die Windungsrichtung der Spirale [25]. In den für diese Arbeit durchgeführten Simulationen windet sie sich, wie bereits von Lambourne beobachtet, entgegen der Drehrichtung des Wirbels. Dies ist in Abbildung 20 mit  $\lambda_2$ -Isoflächen und einer Stromlinie veranschaulicht.

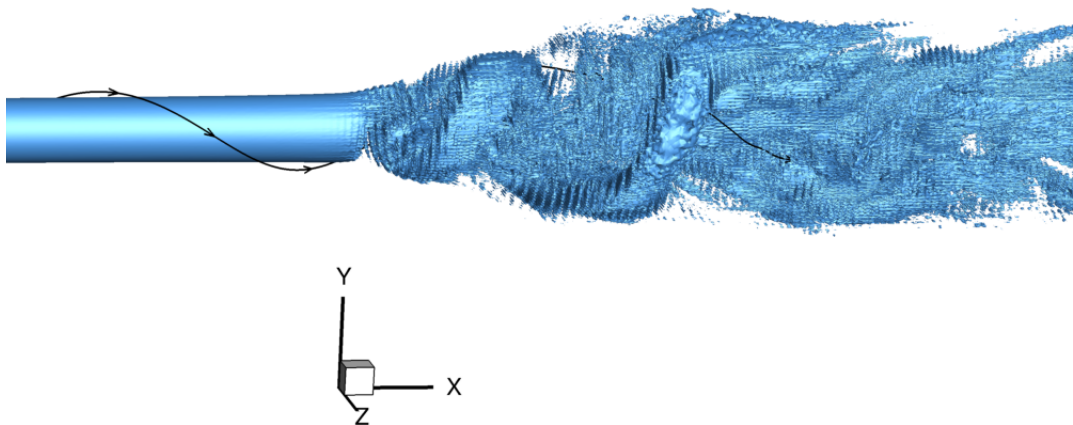


Abbildung 20: Das Aufplatzen des Batchelor-Wirbels mit Parametern  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$ , dargestellt durch eine blau eingefärbte  $\lambda_2$ -Isofläche. Die Rotationsrichtung des Wirbels wird mit einer einzelnen Stromlinie sichtbar gemacht. Es ist zu beobachten, dass sich eine Spirale mit gegenläufigem Drehsinn ausbildet. (Erstellt mit Tecplot 360)

Zuletzt soll der Schnitt durch den Wirbel mit einer schematischen Darstellung solcher Schnitte von Lambourne verglichen werden. Dazu werden in der Schnittebene die Dichteverteilung als Maß für die Position des Wirbelkerns und einige Stromlinien der (auf die Ebene projizierten) Geschwindigkeitsverteilung eingezeichnet. Es ergibt sich erneut eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Resultaten (siehe Abbildung 21).

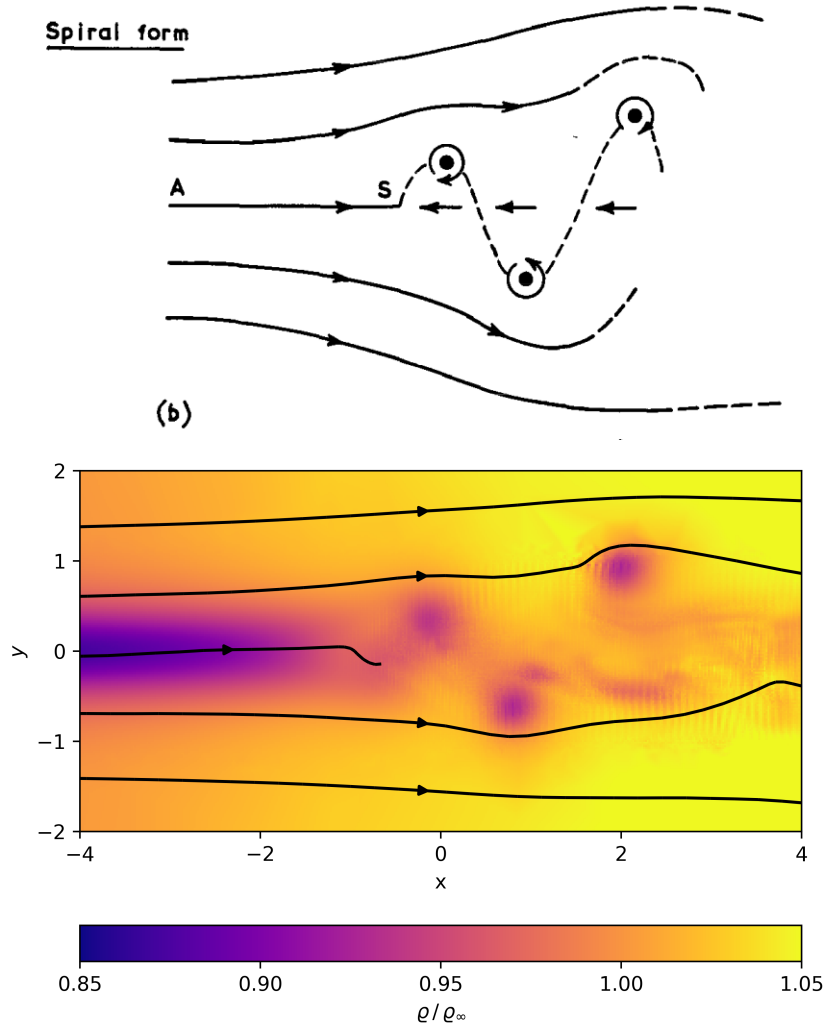


Abbildung 21: Oben: Schematische Darstellung des Wirbelplatzens nach dem Spiraltyp in einer Querschnittsebene, basierend auf experimentellen Beobachtungen, entnommen aus [22]. Unten: Ein vergleichbarer Querschnitt mit farblich gekennzeichnete Dichteverteilung aus der numerischen Simulation des Batchelor-Wirbels mit Parametern  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$ . Die Strömungen stimmen qualitativ überein.

Analog zur Simulation mit einem Batchelor-Wirbel wurde auch ein Erlebacher-Wirbel mit den gleichen Wirbelparametern betrachtet, siehe Anhang F.1. Auch wenn sich das Wirbelprofil quantitativ unterscheidet (insbesondere weitet sich der Wirbel beim Aufplatzen weniger stark auf, siehe Abbildung 39), so ist ebenfalls ein Aufplatzen nach dem Spiraltyp zu beobachten. Auch die grundlegende Gestalt des Aufplatzgebiets und die Windungsrichtung der Spirale stimmen mit dem Batchelor-Wirbel überein.

## 7.2 Numerische Analyse der Stabilität einzelner Wirbel

Als nächstes soll untersucht werden, welche Auswirkungen eine Veränderung der Wirbelparameter  $u_{\phi \max}$  und  $\Delta u_{x \max}$  auf die Stabilität des Wirbels hat. In der Literatur wird für die Stabilität eines Wirbels häufig entweder die Swirl-Rate [7, 14] oder die Rossby-Zahl [5, 38] verwendet. Nach Gleichung (5) gilt für die Swirl-Rate der beiden Wirbel-Typen (Batchelor: Gleichung (1), Erlebacher: Gleichung (2)) gleichermaßen:

$$s := \frac{\max_r |u_\phi|}{u_x(r=0)} = \frac{u_{\phi \max}}{u_\infty + \Delta u_{x \max}} \quad (50)$$

Die Rossby-Zahl (Ro) kann (in der für diesen Kontext üblichen Definition) in die Swirl-Rate umgerechnet werden, und muss daher nicht gesondert betrachtet werden:

$$\text{Ro} := \frac{u_x(r=0)}{R \omega_x(r=0)} = \frac{u_x(r=0)}{R \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u_\phi(r)}{r}} = \begin{cases} \frac{u_x(r=0)}{u_{\phi \max}} = \frac{1}{s} & \text{Batchelor-Wirbel} \\ \frac{u_x(r=0)}{\sqrt{e} u_{\phi \max}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{s} & \text{Erlebacher-Wirbel} \end{cases} \quad (51)$$

Für die nachfolgenden Untersuchungen werden drei Simulationsreihen mit unterschiedlichen Werten für  $\Delta u_{x \max}$  durchgeführt. In jeder Simulationsreihe wird dabei die Swirl-Rate  $s$  so lange variiert, bis der Übergang von stabilen zu platzenden Wirbeln gefunden ist. Die Simulation mit der größten, noch stabilen Swirl-Rate in ihrer Reihe sowie die Simulationen mit den zwei nächstgrößeren Swirl-Raten werden anhand von Schnitten durch die ( $z=0$ )-Ebene analysiert. Dabei wird die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  zur Bestimmung des Aufplatzzpunktes verwendet, während die Dichte Aufschluss über die Form des Wirbels gibt.

Im Folgenden werden die Schnitte basierend auf den Daten aus den Simulationen mit einem einzelnen Batchelor-Wirbel gezeigt (Abbildungen 22 und 22), Schnitte basierend auf den Simulationen mit einem einzelnen Erlebacher-Wirbel finden sich in Anhang F.1. Die Region mit verschwindender bis negativer  $x$ -Geschwindigkeit ist jeweils mit einer roten Kontur umrandet (linke Spalte in den Abbildungen). In den Darstellungen der Dichteverteilung (rechte Spalte) ist deutlich zu erkennen, dass in allen drei Simulationsreihen mit zunehmender Swirl-Rate das Strömungsfeld nach dem Aufplatzen chaotischer wird; von Turbulenz kann dabei allerdings nicht gesprochen werden, da in den Simulationen Reibungseffekte vernachlässigt werden.

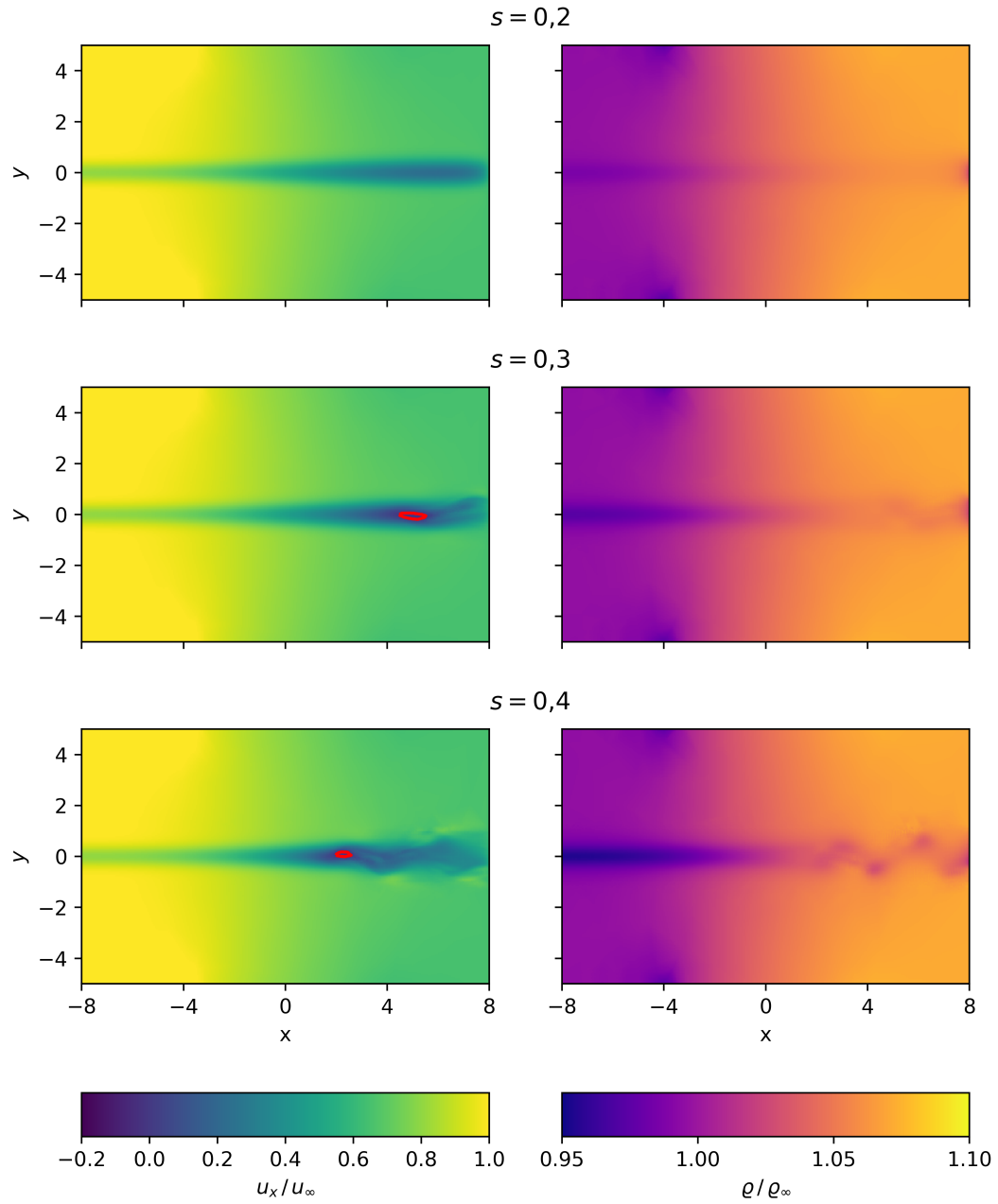


Abbildung 22: Schnitte durch die ( $z=0$ )-Ebene für drei Batchelor-Wirbel mit Abweichung von der axialen Umgebungströmung  $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_\infty$  („Wake“-Profil) und unterschiedlichen Swirl-Raten  $s$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$ , rechts die Dichte  $\rho$  abgebildet. In der linken Spalte ist der Bereich mit  $u_x \leq 0$  m/s rot umrandet, sofern vorhanden.

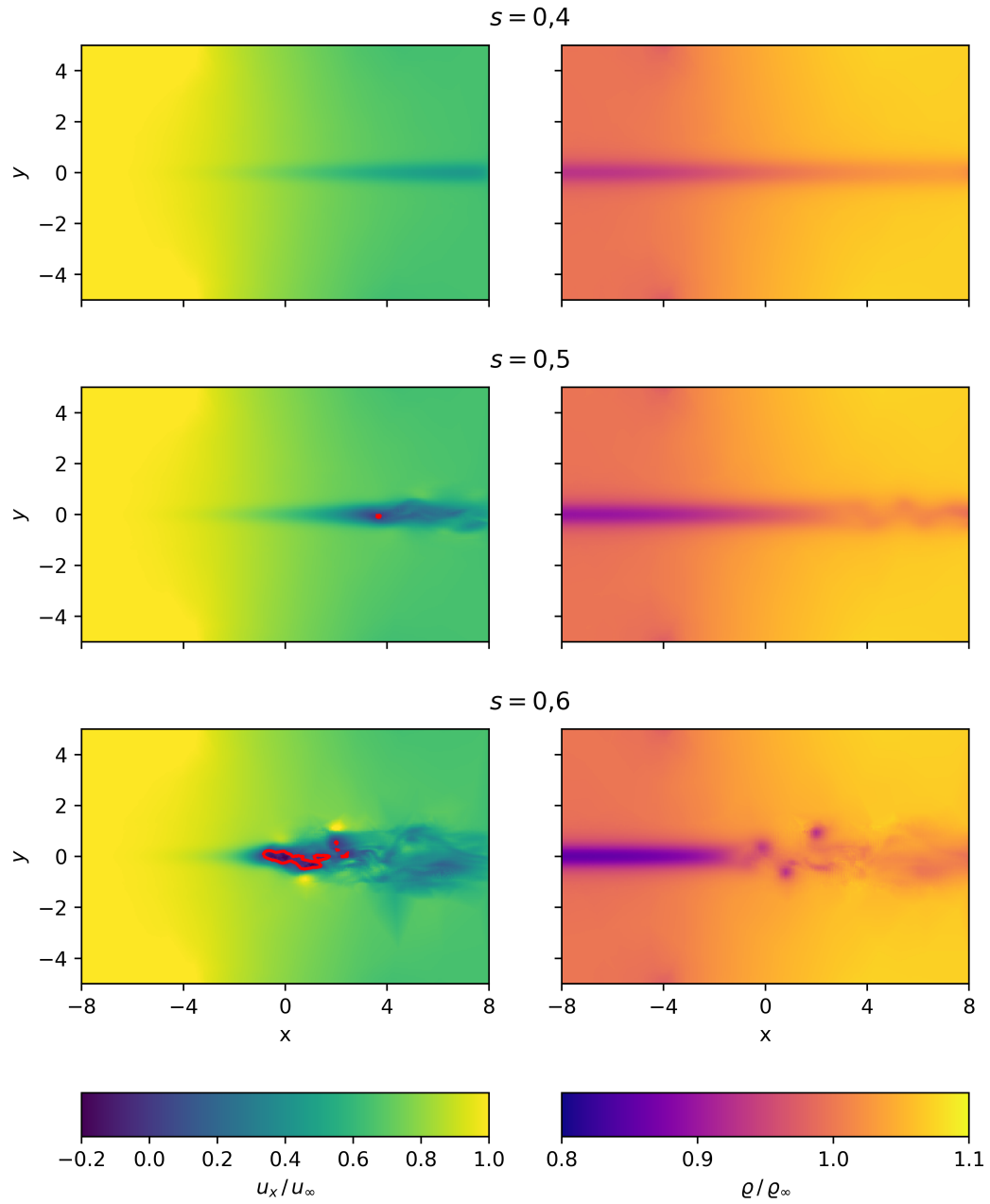


Abbildung 23: Schnitte durch die ( $z=0$ )-Ebene für drei Batchelor-Wirbel mit Abweichung von der axialen Umgebungströmung  $\Delta u_{x \max} = 0$  und unterschiedlichen Swirl-Raten  $s$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$ , rechts die Dichte  $\rho$  abgebildet. In der linken Spalte ist der Bereich mit  $u_x \leq 0$  m/s rot umrandet, sofern vorhanden.

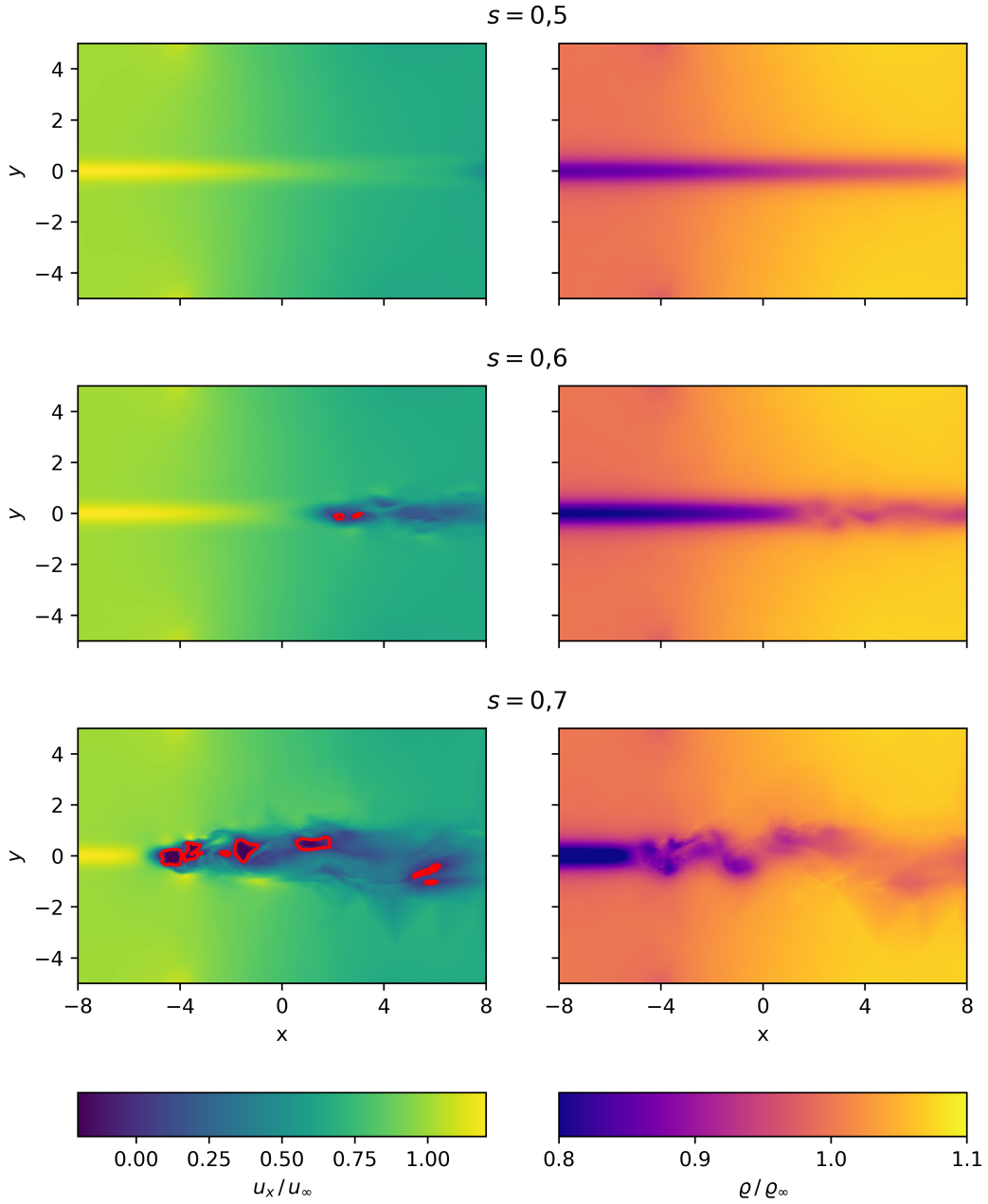


Abbildung 24: Schnitte durch die ( $z=0$ )-Ebene für drei Batchelor-Wirbel mit Abweichung von der axialen Umgebungströmung  $\Delta u_{x \max} = 0,2 u_\infty$  („Jet“-Profil) und unterschiedlichen Swirl-Raten  $s$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$ , rechts die Dichte  $\rho$  abgebildet. In der linken Spalte ist der Bereich mit  $u_x \leq 0$  m/s rot umrandet, sofern vorhanden.

Fasst man die Ergebnisse der diversen Simulationsläufe zusammen, so ergeben sich für die gewählte Geometrie und die verschiedenen Wirbelparameter am Einlass die in Tabelle 1 markierten Stabilitätsbereiche.

		Swirl-Rate $s$ am Einlass					
		0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\frac{\Delta u_{x \max}}{u_\infty}$	-0,2	stabil	platzt bei $x_p = 4,5 \text{ m}$	platzt bei $x_p = 2,1 \text{ m}$	platzt bei $x_p = 0,1 \text{ m}$		
	0,0		stabil	stabil	platzt bei $x_p = 3,7 \text{ m}$	platzt bei $x_p = -0,9 \text{ m}$	
	0,2				stabil	platzt bei $x_p = 2,1 \text{ m}$	platzt bei $x_p = -4,8 \text{ m}$

Tabelle 1: Übersicht über die durchgeführten Simulationen mit einem Batchelor-Wirbel. Der Bereich, in dem der Wirbel stabil bleibt, ist grün eingefärbt, im orange eingefärbten Bereich platzt der Wirbel auf. Die angegebenen Parameter beziehen sich auf die Strömungsbedingungen am Einlass,  $x_p$  ist die  $x$ -Position des Aufplatzens. (Die Position  $x = 0$  entspricht dabei der Mitte des Rohres.)

Wie in Kapitel 5.4 beschrieben, entspricht die Swirl-Rate am Einlass nicht notwendigerweise der Swirl-Rate am Ort des Aufplatzens. Insbesondere sind zwei Simulationen, bei denen  $x_p$  an sehr verschiedenen Stellen liegt, nur in Grenzen vergleichbar, weil der Druckunterschied zwischen Einlass und Aufplatzen unterschiedlich ist.

Insgesamt ergibt sich aber, dass eine Erhöhung der Swirl-Rate  $s$  den Wirbel destabilisiert und den Aufplatzen stromaufwärts verschiebt. Ein Vergleich zwischen den drei Simulationsreihen zeigt zudem, dass die Swirl-Rate alleine kein hinreichendes Kriterium für die Stabilität des Wirbels darstellt. Das steht im Kontrast zu Literaturergebnissen für reibungsbehaftete Strömungen, bei denen ab einer gewissen Reynolds-Zahl eine allgemein gültige kritische Swirl-Rate bzw. Rossby-Zahl gefunden werden kann (siehe z. B. [41]).

### 7.3 Vergleich der theoretischen Überlegungen mit Simulationsergebnissen

Die in Kapitel 5.4 basierend auf Überlegungen für stabile Wirbel theoretisch hergeleiteten Verläufe von  $u_{\phi \max}(x)$  und  $u_x(r = 0, x)$  (und damit  $s$ ) werden im Folgenden mit Werten aus den bereits in Kapitel 7.2 vorgestellten Simulationen einzelner Batchelor-Wirbel verglichen.

Für die theoretischen Werte werden für alle neun in 7.2 betrachteten Wirbelkonfigurationen anhand der Gleichungen (39) und (45) die Verläufe von  $u_{\phi \max}(x)$  und  $u_x(r = 0, x)$  berechnet. In den Abbildungen 25 bis 27 sind diese als durchgezogene Linien aufgetragen. Für die Ergebnisse der Simulationen werden die Werte von  $u_{\phi \max}(x)$  und  $u_x(r = 0, x)$  aus einer Reihe von Schnitten senkrecht zur  $x$ -Achse ausgelesen. Diese Werte sind in den Abbildungen als Punkte dargestellt. In jeder Abbildung korrespondieren Punkte und Linien gleicher Farbe mit den gleichen Wirbelparametern.

Insgesamt ergibt sich lediglich für die stabilen Wirbel (blau) eine durchgängig gute Übereinstimmung zwischen theoretischen Überlegungen und Simulationsergebnissen. An den Übergängen zwischen den Rohrsegmenten ist der Verlauf von  $u_x$  in den Simulationen etwas weniger abrupt als in der theoretischen Betrachtung, es werden aber im Inneren der jeweiligen Segmente sehr ähnliche Werte angenommen. Diese Übereinstimmung zwischen Theorie und Simulationsergebnissen für stabile Wirbel ist nicht überraschend, da in den theoretischen Betrachtungen grundsätzlich mit der Annahme eines achsensymmetrischen und stationären Wirbels gearbeitet wird.

Diese Annahmen werden durch ein Aufplatzen nach dem Spiraltyp gebrochen. Dennoch wäre es möglich, dass die Theorie den Verlauf von  $u_{\phi \max}(x)$  und  $u_x(r = 0, x)$  zumindest bis zum Aufplatzen korrekt beschreibt. Das ist in den untersuchten Fällen allerdings nur für das Wake-Profil (siehe Abbildung 25) gegeben. Hier sagt die Theorie für beide in den Simulationen aufplatzende Wirbel einen Staupunkt voraus, und dieser befindet sich für  $s = 0,3$  auch am gleichen Ort wie in der Simulation. Für  $s = 0,4$  liegt der berechnete Staupunkt knapp 3 Kernradien hinter dem numerisch bestimmten. Für die anderen Wirbelprofile (siehe



Abbildung 26 und 27) weist der theoretisch bestimmte Verlauf für die in den Simulationen aufplatzenden Wirbel überhaupt keine Staupunkte mehr auf; ein Wirbelplatzen kann also hier aus der Theorie nicht abgeleitet werden.

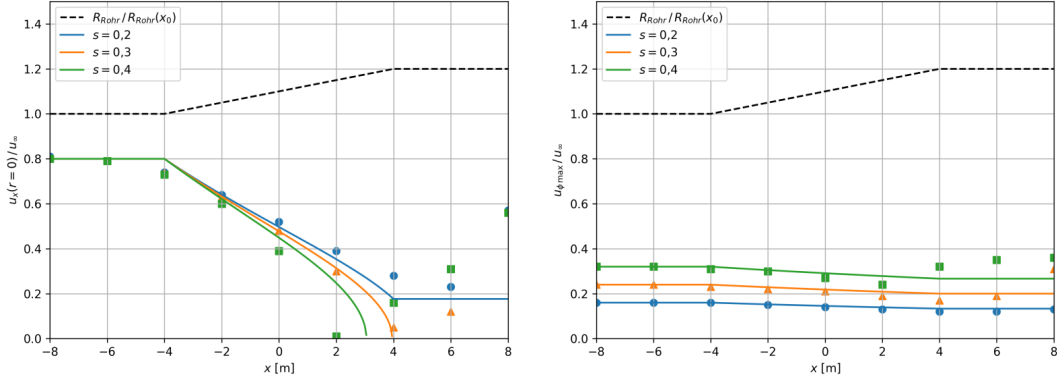


Abbildung 25: Werte für  $u_x(r=0)$  (links) und  $u_{\phi \max}$  (rechts) für einen einzelnen Batchelor-Wirbel mit  $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_{\infty}$  und verschiedene Swirl-Raten. Die theoretische Vorhersage ist in durchgezogenen Linien dargestellt, die Ergebnisse der numerischen Simulationen als Punkte. Eine gute Übereinstimmung findet sich im Fall eines stabilen Wirbels (blau), sowie des ersten aufgeplatzten Wirbels (orange), der Aufplatzpunkt des zweiten aufgeplatzten Wirbels (grün) wird von der Theorie zu weit stromabwärts vorhergesagt.

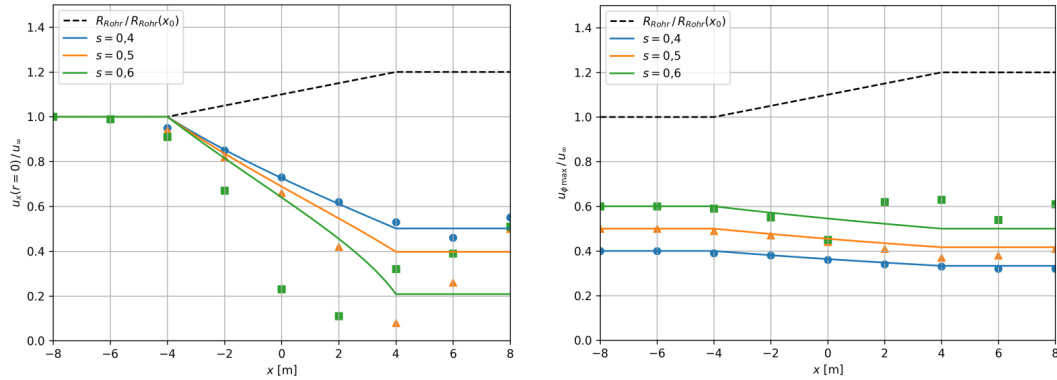


Abbildung 26: Werte für  $u_x(r=0)$  (links) und  $u_{\phi \max}$  (rechts) für einen einzelnen Batchelor-Wirbel mit  $\Delta u_{x \max} = 0$  und verschiedene Swirl-Raten. Die theoretische Vorhersage ist in durchgezogenen Linien dargestellt, die Ergebnisse der numerischen Simulationen als Punkte. Eine gute Übereinstimmung findet sich nur im Fall eines stabilen Wirbels (blau). Die beiden aufgeplatzten Wirbel (orange und grün) werden von der Theorie nicht korrekt beschrieben; die beobachteten Staupunkte ( $u_x/u_{\infty} = 0$ ) werden nicht vorhergesagt.

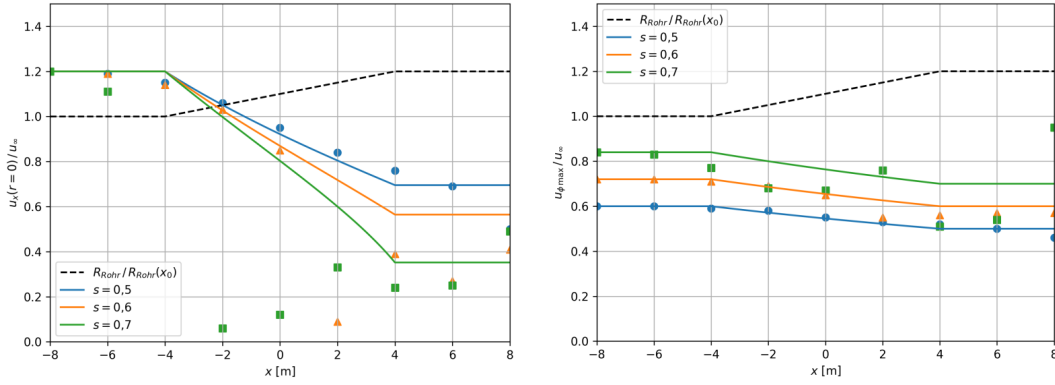


Abbildung 27: Werte für  $u_x(r=0)$  (links) und  $u_{\phi \max}$  (rechts) für einen einzelnen Batchelor-Wirbel mit  $\Delta u_{x \max} = 0,2 u_{\infty}$  und verschiedene Swirl-Raten. Die theoretische Vorhersage ist in durchgezogenen Linien dargestellt, die Ergebnisse der numerischen Simulationen als Punkte. Eine gute Übereinstimmung findet sich nur im Fall eines stabilen Wirbels (blau). Die beiden aufplatzenden Wirbel (orange und grün) werden von der Theorie nicht korrekt beschrieben; die beobachteten Geschwindigkeiten fallen wesentlich schneller und die beobachteten Staupunkte ( $u_x/u_{\infty} = 0$ ) werden nicht vorhergesagt.

Eine kritische Swirl-Rate, wie sie in der Literatur häufig beschrieben wird, lässt sich aus den theoretischen Überlegungen noch nicht ableiten, insbesondere divergiert  $s$  wenn  $u_x(r=0)$  auf null fällt, was auch in den theoretisch ermittelten Verläufen für zwei der Wake-Wirbel auftritt.

Auffällig ist, dass die Vorhersagen der Staupunkte umso schlechter werden, je höher die am Einlass festgelegte Swirl-Rate des Wirbels ist. Ein möglicher Grund für dieses Verhalten wäre eine mit  $s$  verknüpfte Verletzung der in Kapitel 5.4 getroffenen Annahmen. Hier wurde unter anderem davon ausgegangen, dass für den Quotienten  $p(\infty, x) / \varrho(\infty, x)$  die Werte am Rohrrand  $r = R_{\text{Rohr}}(x)$  verwendet werden können, die dann für eine Strömung ohne Wirbel genähert werden. Mit wachsender Swirl-Rate steigt aber die azimuthale Geschwindigkeit auch am Rand des Simulationsgebiets ( $r = R_{\text{Rohr}}$ ) und weicht damit immer stärker von den Bedingungen in einer Strömung ohne Wirbel ab.

## 7.4 Untersuchung der Interaktion zweier Wirbel

In diesem Kapitel wird exemplarisch untersucht, ob das Aufplatzverhalten eines Wirbels durch die Gegenwart eines zweiten Wirbels beeinflusst wird. Dazu wird ein Batchelor-Wirbel mit  $u_{\phi \max} = 0,5 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$  als Hauptwirbel ausgewählt und in mehreren Simulationen mit schwächeren Batchelor-Wirbeln ( $u_{\phi \max} = \pm 0,2 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$ ) unterschiedlicher Drehrichtungen kombiniert. Zusätzlich wird der Abstand zwischen den Wirbelmittelpunkten variiert. Für den Hauptwirbel wird die kleinste Swirl-Rate gewählt, bei der in einer Simulation ohne zweiten Wirbel ein Aufplatzen beobachtet wird (vgl. Tabelle 1), sodass er auf eventuelle Beeinflussung durch den zweiten Wirbel möglichst empfindlich reagiert. Da untersucht wird, ob und wie weit der zweite, schwächere Wirbel das Aufplatzverhalten des Hauptwirbels steuern kann, soll er im Folgenden als Steuerwirbel bezeichnet werden.

Die Ergebnisse dieser Läufe sollen hinsichtlich ihres Aufplatzverhaltens analysiert werden. Im Fall mehrerer Wirbel ist hierfür ein Schnitt durch eine Ebene parallel zur  $x$ -Achse (wie z. B. in Abbildung 16) nicht mehr sinnvoll, da sich die Wirbelkerne aufgrund ihrer Interaktion aus jeder solcher Ebene herausbewegen (siehe Abbildung 28).

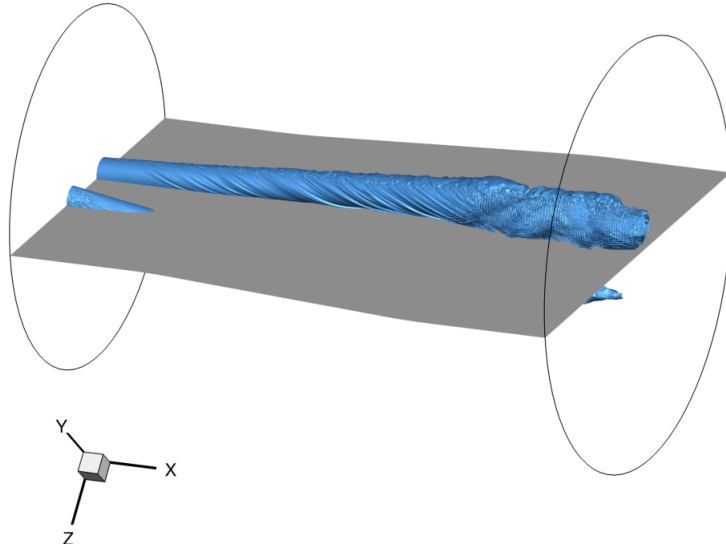


Abbildung 28: Für zwei interagierende Wirbel kann keine Schnittebene parallel zur  $x$ -Achse gefunden werden, die die Wirbelkerne beider Wirbel (als  $\lambda_2$ -Isofläche in blau dargestellt) durchgehend erfasst. Beispielhaft illustriert an einer Schnittebene (grau) durch die Wirbelmittelpunkte am Einlass. (Erstellt mit Tecplot 360.)

Eine mögliche Alternative zur Darstellung sind hier Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse, die an den gewählten Positionen ebenfalls eine Analyse der Wirbel ermöglichen. So können über die  $x$ -Geschwindigkeit erneut Staupunkte und damit der Aufplatzzpunkt identifiziert werden. Zur Einordnung der Schnitte in den Strömungsverlauf und als Illustration des Verlaufs der Wirbelkerne werden Bündel von Stromlinien verwendet, die auf der Einlassrandbedingung im Wirbelkern initialisiert und dann mithilfe von Tecplot 360 propagiert werden.

Die azimutale Geschwindigkeit  $u_\phi$  ist über die Definition der Zylinderkoordinaten an die Rotationsachse eines Wirbels gebunden. In diesem Fall gibt es allerdings mindestens zwei solche Achsen<sup>8</sup>, die zudem weder mit der  $x$ -Achse zusammenfallen, noch parallel zu ihr verlaufen. Daher ist die Azimutalgeschwindigkeit nicht mehr eindeutig definiert und wird in diesem Kapitel durch die  $x$ -Komponente des Wirbelvektors  $\vec{\omega}$  ersetzt.

Im Folgenden werden exemplarisch vier besonders interessante Fälle betrachtet:

#### Fall a) Abstand $5R$ , gegenläufig

Im ersten Fall werden zwei Batchelor-Wirbel mit gegenläufigem Drehsinn und einem Abstand von  $d_{\text{Wirbel}} = 5R$  (zwischen ihren Wirbelmittelpunkten am Einlass) untersucht. Der Wirbelkern des Hauptwirbels verändert seine Position in der  $y$ - $z$ -Ebene nur wenig, der Wirbelkern des Steuerwirbels deutlich mehr (siehe Abbildung 30). Zudem verändert sich die Position des Aufplatzzpunktes in  $x$ -Richtung: Während der Hauptwirbel alleine bei  $x_p = 3,7\text{ m}$  aufplatzt, findet sich jetzt bereits bei  $x_p = 3,3\text{ m}$  ein Staupunkt mit anschließendem Aufplatzen nach dem Spiraltyp.

In Abbildung 30 ist gut zu sehen, dass der Wirbelkern des Steuerwirbels aus dem Bereich hoher Auflösung im Zentrum des Simulationsgebiets (vgl. Abbildung 12) herauswandert. Eine Ausdehnung des hoch aufgelösten Simulationsbereichs bis zum Rand des Rohres ist leider nur schwer möglich, da die damit verbundene Erhöhung der Gesamtzahl an Gitterpunkten den Rechenaufwand der Simulationen erheblich erhöhen würde.

<sup>8</sup>Durch die Interaktion der Wirbel können es auch mehr als zwei sein.

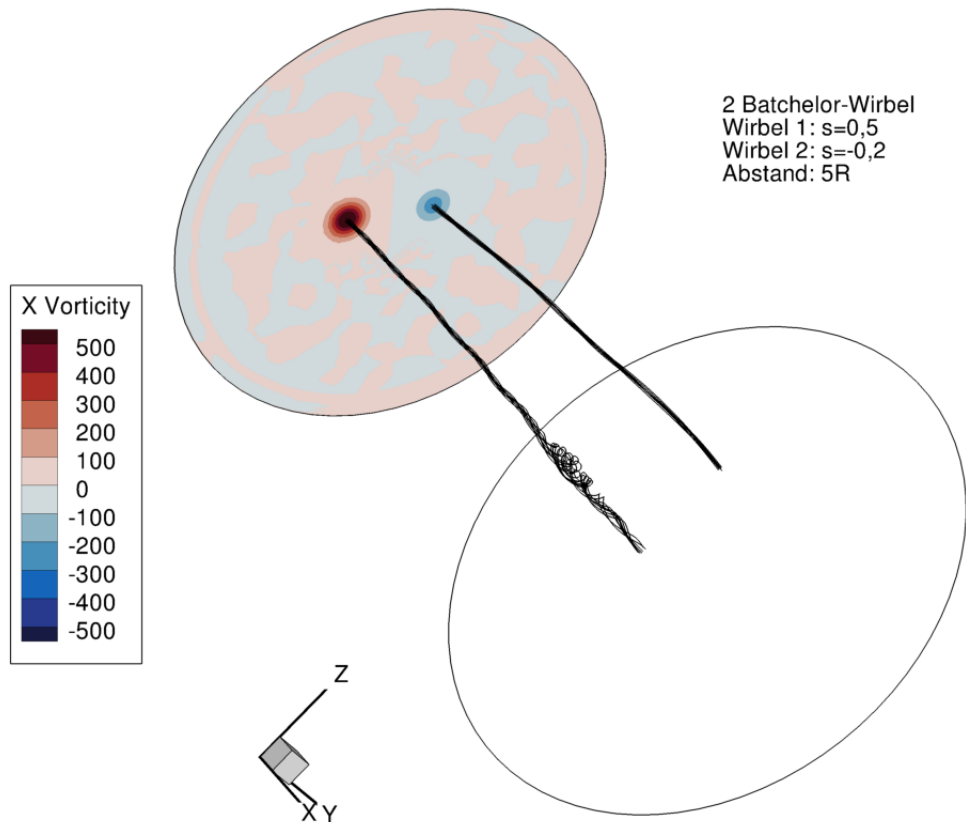


Abbildung 29: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gegenläufiger Batchelor-Wirbel im Abstand  $5R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = -0,2$ . Bei diesem Abstand interagieren die Wirbel nur sehr schwach, das Aufplatzen des Hauptwirbels (links) verschiebt sich gegenüber einer Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel um etwa einen Kernradius stromaufwärts.

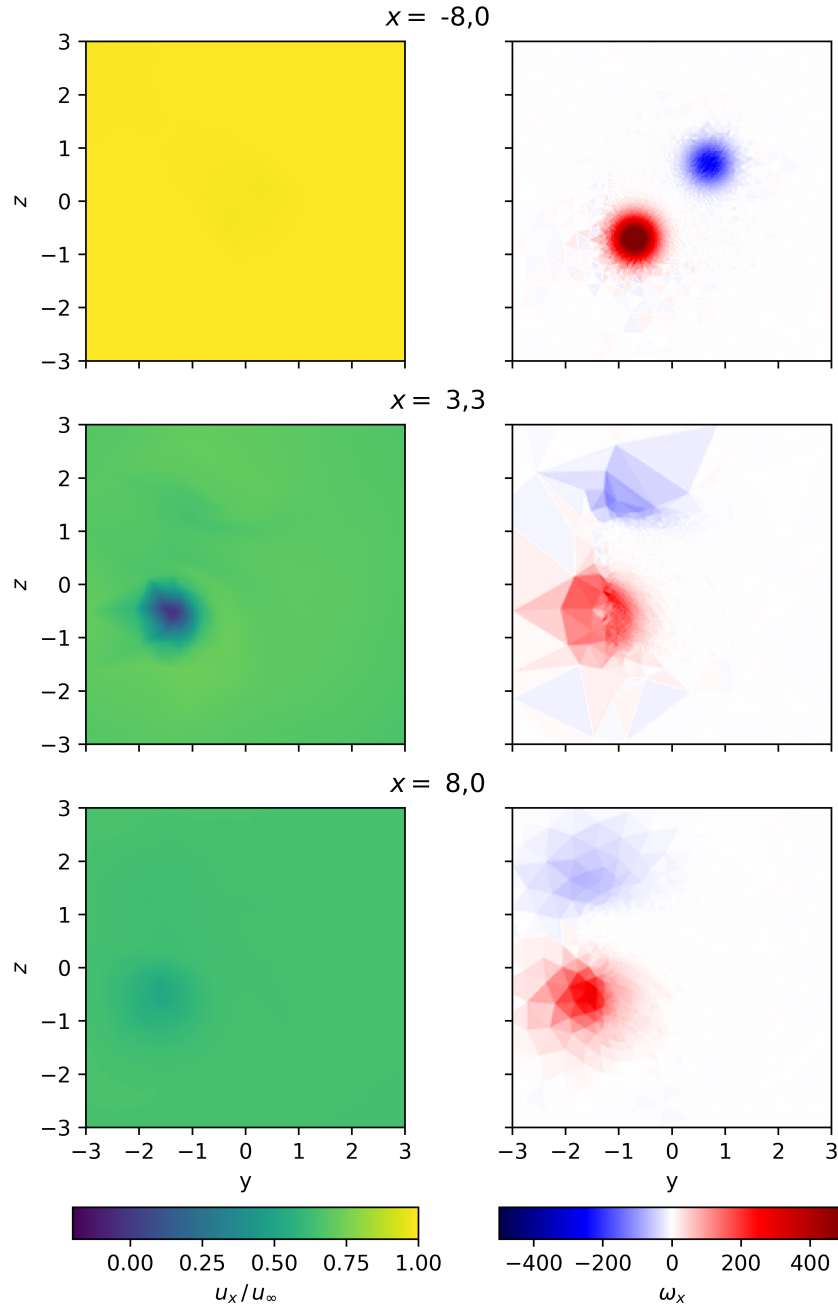


Abbildung 30: Drei Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse durch eine Strömung mit zwei gegenläufigen Batchelor-Wirbeln im Abstand  $5R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = -0,2$ . Es werden  $u_x$  und  $\omega_x$  am Einlass (oben), am Aufplatzzpunkt  $x_p = 3,3$  m des Hauptwirbels (Mitte) und am Auslass (unten) gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die Wirbel im Verlauf des Rohres teilweise aus dem hoch aufgelösten Bereich der Simulationsumgebung herauslaufen.

### Fall b) Abstand $3R$ , gegenläufig

Um die Interaktion der beiden Wirbel zu erhöhen, wird im nächsten Schritt der Abstand zwischen den Wirbelmittelpunkten am Einlass auf  $d_{\text{Wirbel}} = 3R$  verringert, die übrigen Parameter werden zu Fall a) konstant gehalten. Die Bewegungen der Wirbelkerne in der  $y$ - $z$ -Ebene fallen stärker aus als in Fall (a) (siehe Abbildung 32) und das Aufplatzen des Hauptwirbels wird zumindest im Simulationsbereich verhindert. Die minimale  $x$ -Geschwindigkeit im Strömungsfeld beträgt  $\min(u_x) \approx 0,24 u_\infty$ . Die leichten Unregelmäßigkeiten im Stromlinienbild (Abbildung 31, unten rechts) sind darauf zurückzuführen, dass beide Wirbel den hoch aufgelösten Bereich der Simulationsumgebung erneut zumindest teilweise verlassen haben und folglich mit einer deutlich größeren Auflösung weiterberechnet werden.

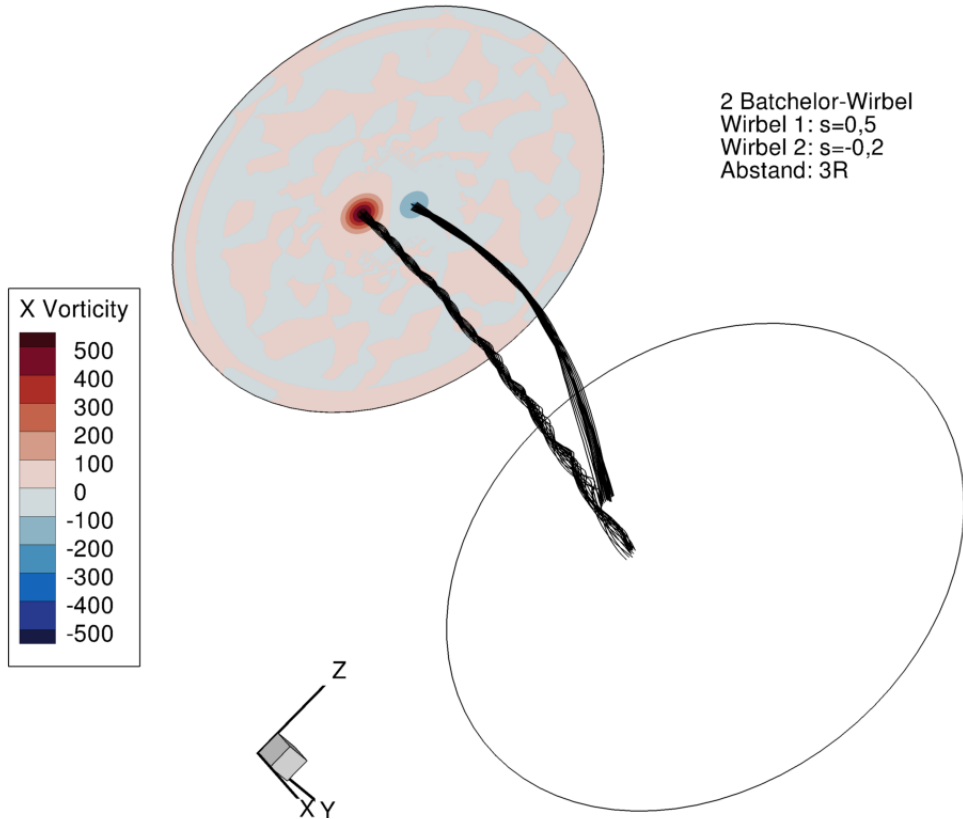


Abbildung 31: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gegenläufiger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = -0,2$ . Durch die Interaktion der beiden Wirbel wird das Aufplatzen des Hauptwirbels (links) im Simulationsbereich verhindert.

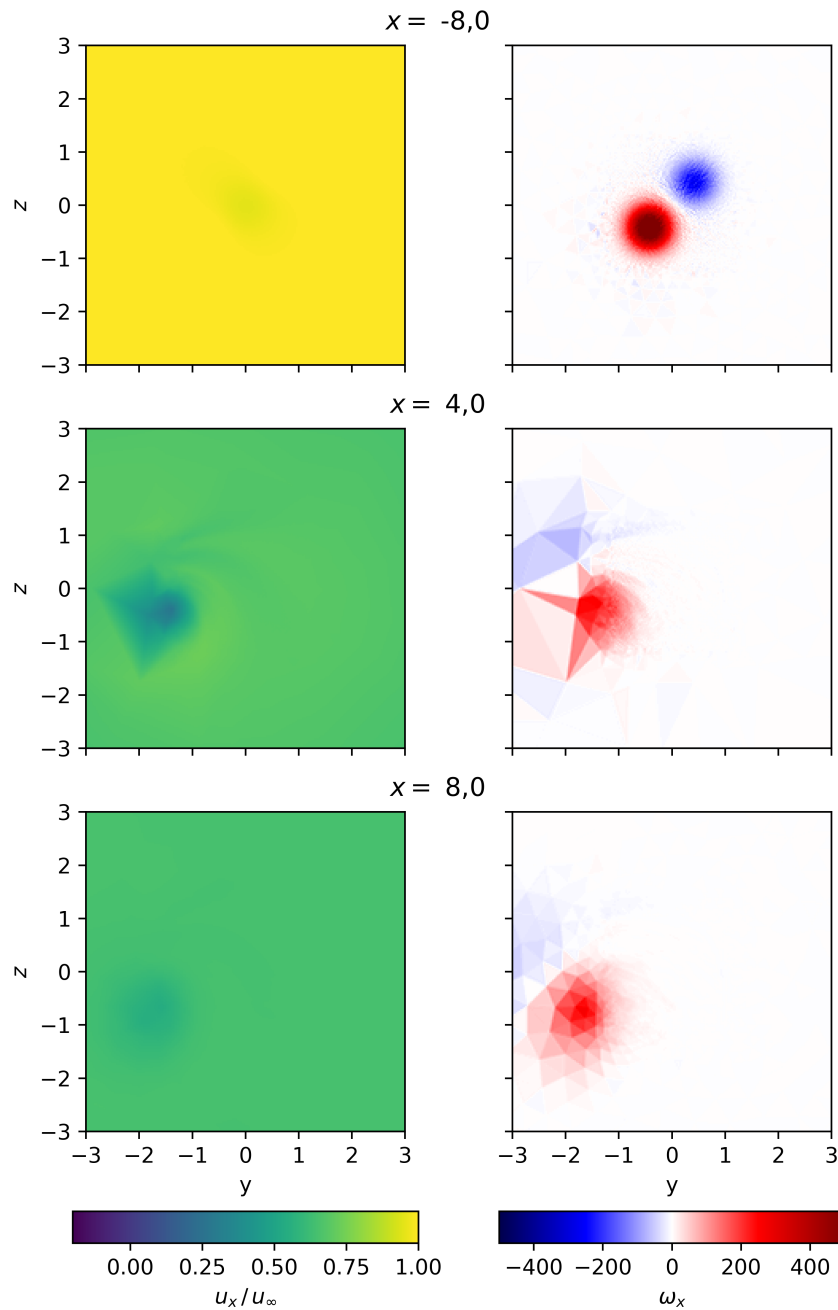


Abbildung 32: Drei Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse durch eine Strömung mit zwei gegenläufigen Batchelor-Wirbeln im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = -0,2$ .  $u_x$  und  $\omega_x$  werden am Einlass (oben), in der Mitte des Rohres (Mitte) und am Auslass (unten) gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die Wirbel im Verlauf des Rohres teilweise aus dem hoch aufgelösten Bereich der Simulationsumgebung herauslaufen.

### Fall c) Abstand $5R$ , gleichsinnig

In diesem Fall wird die Konfiguration aus Fall a) wiederholt, allerdings haben nun beide Wirbel den gleichen Drehsinn. Der Kern des Hauptwirbels bewegt sich nur wenig in der  $y$ - $z$ -Ebene, der Steuerwirbel bewegt sich deutlich mehr und läuft erneut aus dem hoch aufgelösten Bereich heraus (siehe Abbildung 34). Der Hauptwirbel platzt nach wie vor nach dem Spiraltyp auf (siehe Abbildung 33), allerdings verschiebt sich der Aufplatzzpunkt gegenüber der Einzelsimulation deutlich stromaufwärts, von  $x_p = 3,7$  m nach  $x_p = 2,9$  m. Damit platzt der Hauptwirbel auch früher auf als in Fall (a) ( $x_p$  liegt dort bei  $3,3$  m).

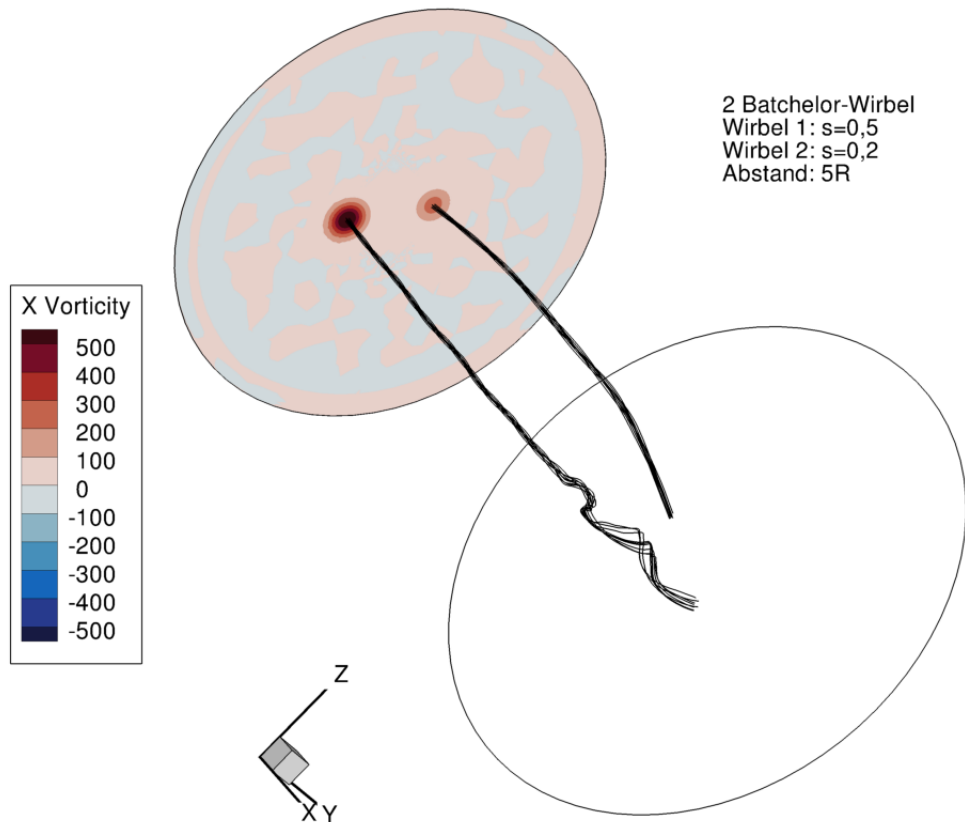


Abbildung 33: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $5R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = 0,2$ . Bei diesem Abstand interagieren die Wirbel nur sehr schwach, das Aufplatzen des Hauptwirbels (links) verschiebt sich gegenüber einer Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel um etwa zwei Kernradien stromaufwärts.



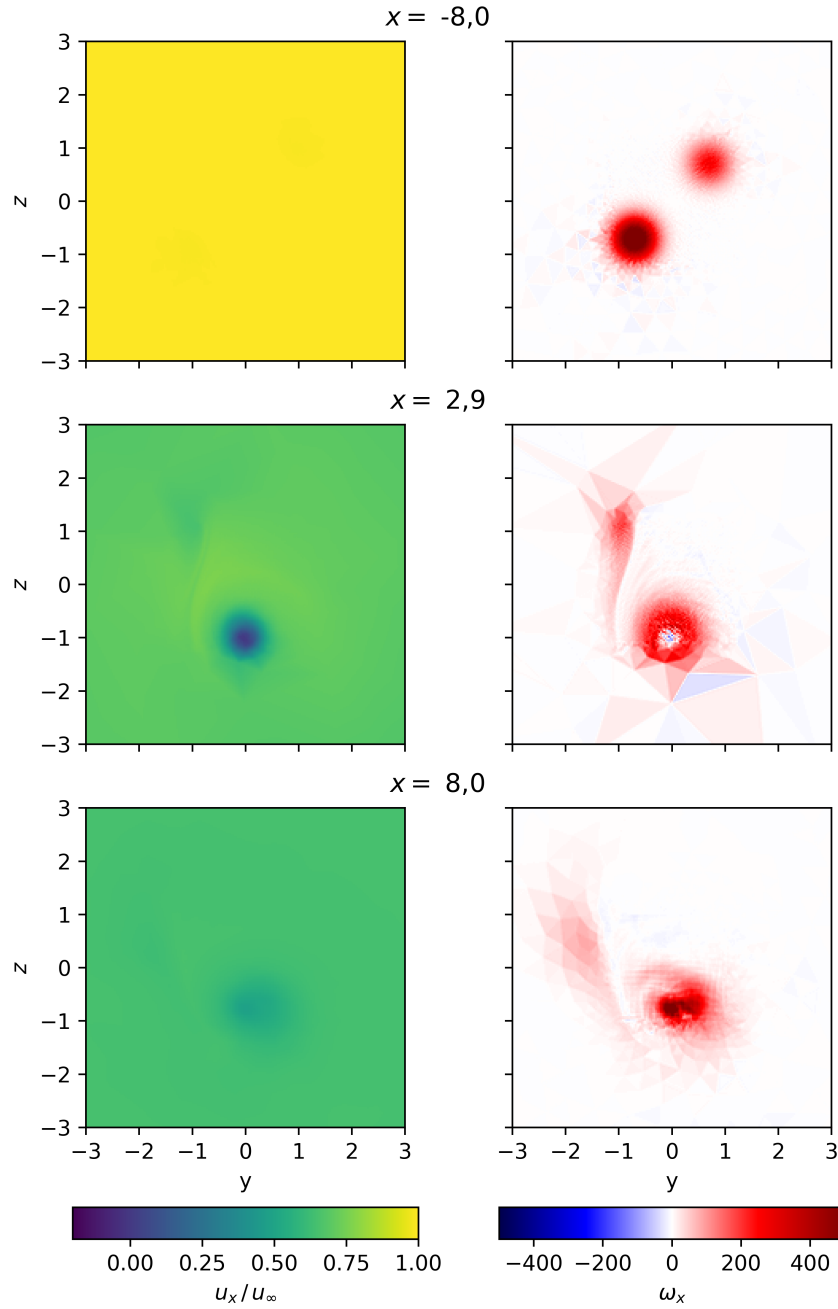


Abbildung 34: Drei Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse durch eine Strömung mit zwei gleichsinigen Batchelor-Wirbeln im Abstand  $5R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = 0,2$ .  $u_x$  und  $\omega_x$  werden am Einlass (oben), am Aufplatzzpunkt  $x_p = 2,9$  m des Hauptwirbels (Mitte) und am Auslass (unten) gezeigt. Es ist zu erkennen, dass der Steuerwirbel im Verlauf des Rohres vollständig aus dem hoch aufgelösten Bereich der Simulationsumgebung herausläuft.

#### Fall d) Abstand $3R$ , gleichsinnig

Der Abstand der Wirbel wird gegenüber Fall (c) von  $d_{\text{Wirbel}} = 5R$  auf  $d_{\text{Wirbel}} = 3R$  verringert, um erneut die Stärke der Interaktion zu vergrößern. Hier zeigt sich für den Steuerwirbel ein Verhalten, dass deutlich von den anderen drei Fällen abweicht: Während sich die Position in der  $y$ - $z$ -Ebene des Hauptwirbels nur unwesentlich verändert, verformt sich der Wirbelkern des Steuerwirbels zu einem flachen Band, das sich dann um den Hauptwirbel herumwickelt. Der Hauptwirbel platzt nach wie vor nach dem Spiraltyp auf, der Aufplatzzpunkt wandert im Vergleich zur Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel weiter stromabwärts, von  $x_p = 3,7$  m nach  $x_p = 4,0$  m. Es kann nicht abschließend geklärt werden, ob die Verformung des Steuerwirbels einem Aufplatzen nach dem Doppelhelix-Typ entspricht, da dieser Typ keinen Staupunkt aufweist und die charakteristische Doppelhelixform angesichts der starken Wirbelinteraktion nicht identifiziert werden kann.

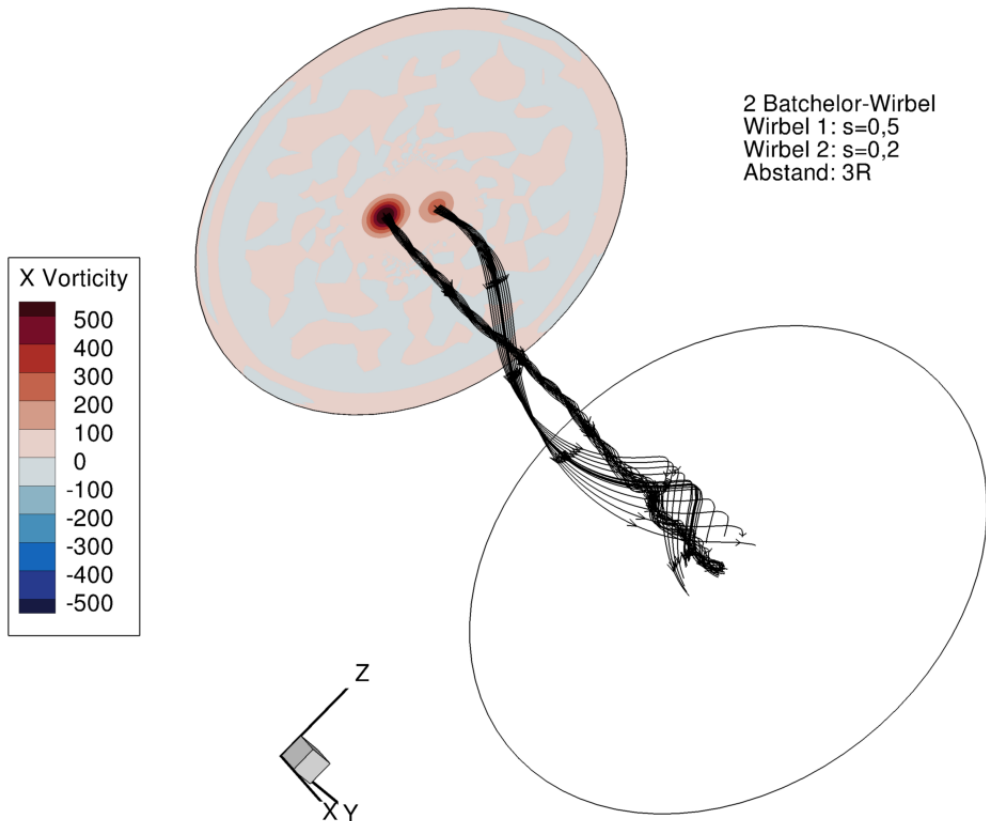


Abbildung 35: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = 0,2$ . Der Steuerwirbel (am Einlass rechts) wickelt sich vollständig um den Hauptwirbel (am Einlass links). Das Aufplatzen des Hauptwirbels verschiebt gegenüber einer Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel um knapp einen Kernradius stromabwärts.

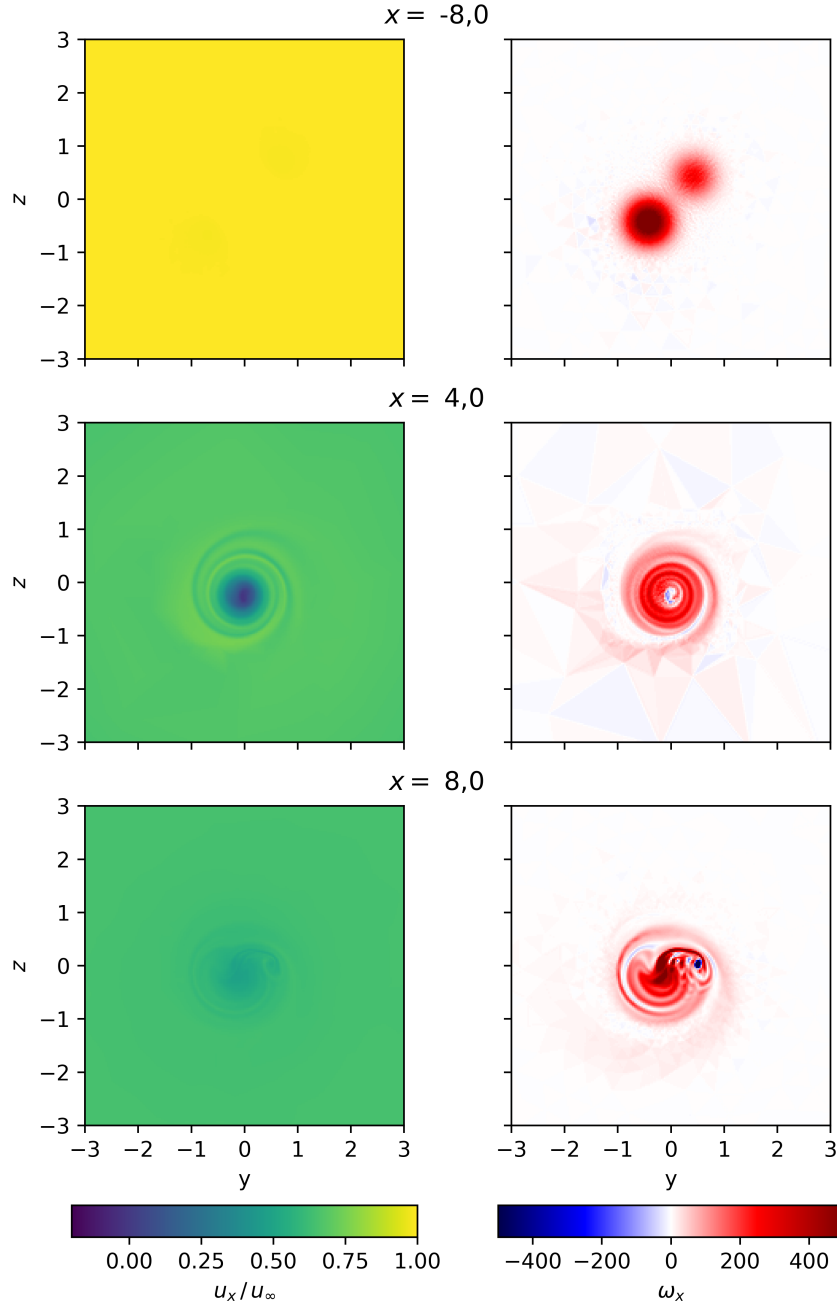


Abbildung 36: Drei Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse durch eine Strömung mit zwei gleichsinnigen Batchelor-Wirbeln im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,5$  und  $s_2 = 0,2$ .  $u_x$  und  $\omega_x$  werden am Einlass (oben), am Aufplatzzpunkt des Hauptwirbels  $x_p = 4,0$  m (Mitte) und am Auslass (unten) gezeigt. Es ist zu erkennen, dass sich der Steuerwirbel um den Hauptwirbel herumwickelt. Die Position des Hauptwirbels in der  $y$ - $z$ -Ebene verändert sich nur unwesentlich.

Eine Übersicht über die Ergebnisse der oben besprochenen Simulationen, sowie die Ergebnisse einiger weiterer, hier nicht näher betrachteter, Fälle liefert die Tabelle 2. Nur in einem Fall ( $d_{\text{Wirbel}} = 3R$ ,  $s_1 = 0,5$ ,  $s_2 = -0,2$ ) wird der Hauptwirbel durch den Steuerwirbel so weit stabilisiert, dass im Simulationsbereich kein Aufplatzen erfolgt. In allen anderen Fällen, in denen der Hauptwirbel auch ohne einen Steuerwirbel aufplatzen würde, wird der

Aufplatzpunkt durch die Anwesenheit des Steuerwirbels bei  $d_{\text{Wirbel}} = 3 R$  stromabwärts verschoben. Bei  $d_{\text{Wirbel}} = 5 R$  wandert er dagegen stromaufwärts. Der Drehsinn des Steuerwirbels spielt dabei offenbar nur eine untergeordnete Rolle. Der genaue Mechanismus, der diesen Verschiebungen zu Grunde liegt, ist aus den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Auswertungen noch nicht ersichtlich.

		$d_{\text{Wirbel}} = 3 R$			$d_{\text{Wirbel}} = 5 R$
		Swirl-Rate des Hauptwirbels $s_1$ am Einlass			$s_1$
		0,4	0,5	0,6	0,5
Swirl-Rate	-0,2	stabil	stabil	platzt bei $x_p = -0,5 \text{ m}$	platzt bei $x_p = 3,3 \text{ m}$
$s_2$ des	0,0	stabil	platzt bei $x_p = 3,7 \text{ m}$	platzt bei $x_p = -0,9 \text{ m}$	platzt bei $x_p = 3,7 \text{ m}$
Steuerwirbels	0,2	stabil	platzt bei $x_p = 4,0 \text{ m}$	platzt bei $x_p = -0,3 \text{ m}$	platzt bei $x_p = 2,9 \text{ m}$

Tabelle 2: Übersicht über die durchgeführten Simulationen mit zwei Batchelor-Wirbeln mit einem Abstand der Wirbelmittelpunkte von  $d_{\text{Wirbel}} = 3 R$  links der Doppellinie und  $d_{\text{Wirbel}} = 5 R$  rechts davon. Der Bereich, in dem der Hauptwirbel stabil bleibt, ist grün eingefärbt, im orange eingefärbten Bereich platzt er auf. Die angegebenen Parameter beziehen sich auf die Strömungsbedingungen am Einlass,  $x_p$  ist die  $x$ -Position des Aufplatzpunkts des Hauptwirbels. (Die Position  $x = 0$  entspricht dabei der Mitte des Rohres.) Eine Swirl-Rate des Steuerwirbels von  $s_2 = 0 \text{ m/s}$  entspricht einer Simulation ohne einen Steuerwirbel.

## 8 Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Phänomen des Wirbelplatzens in kompressiblen Unterschallströmungen durch eine Vielzahl von theoretischen und numerischen Betrachtungen untersucht.

Dabei werden im ersten Schritt (Kapitel 5) zwei Wirbeldefinitionen (nach Batchelor und Erlebacher et al.) um kompressible Effekte erweitert, und die sich daraus ergebenden Profile für Druck und Dichte im Inneren der Wirbel berechnet. Im Falle einzelner, ungestörter Wirbel kann dabei eine analytische Lösung gefunden werden, im Fall mehrerer Wirbel ergibt sich lediglich eine implizite Lösung, die dann numerisch berechnet werden muss. Es kann aber mit der entwickelten Methode eine Anfangsbedingung für ein beliebiges Ensemble aus Wirbeln berechnet werden, das die zeitunabhängige Euler-Gleichung erfüllt.

Zudem wird ein theoretisches Modell für schlanke, achsensymmetrische Wirbel, das zuerst von Hall für inkompressible Strömungen aufgestellt wurde, um kompressible Effekte erweitert und auf die beiden verwendeten Wirbeldefinitionen angewendet.

Im zweiten Schritt (Kapitel 6) wird eine Simulationsumgebung (ein konisches Rohr mit drei Segmenten) erstellt und mit einer Gitterstruktur versehen, die für die späteren numerischen Simulationen mit dem TAU-Code benötigt wird. Die zuvor hergeleiteten Gleichungen für die Anfangsbedingungen werden in einem Python-Programm implementiert, sodass sie in einem für den TAU-Code geeigneten Format zur Verfügung stehen. Für Simulationen mit zwei (oder mehr) Wirbeln zeigt sich in den Simulationsergebnissen, dass die gewählte Verteilung der Gitterpunkte dem Verlauf der Wirbel im Simulationsbereich nicht immer gerecht wird. Hier könnte eine dynamische Anpassung der Auflösung während den Simulationen, zum Beispiel mit einer an lokale Wirbelstärken gekoppelten Gitterverfeinerung, Abhilfe schaffen.

Im Anschluss werden die Ergebnisse der numerischen Simulationen ausgewertet (Kapitel 7). Im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen aus der Literatur kann gezeigt werden, dass sich das Phänomen des Wirbelplatzens nach dem Spiraltyp mit beiden Wirbeldefinition – nach Batchelor und Erlebacher et al. – gut nachbilden lässt. Die anderen beiden Aufplatzformen (Blasentyp und Doppelhelixtyp) können im untersuchten Parameterraum nicht abschließend nachgewiesen werden.

Die Stabilität einzelner Batchelor- und Erlebacher-Wirbel bei Variation der Swirl-Rate  $s$  wird für drei verschiedenen axiale Geschwindigkeitsprofile untersucht. Die Ergebnisse der numerischen Simulationen zeigen eindeutig, dass ein Erhöhen der Azimutalgeschwindigkeit  $u_{\phi \max}$  den Wirbel destabilisiert und eine Erhöhung der axialen Geschwindigkeit  $\Delta x_{x \max}$  im Wirbelkern den Wirbel stabilisiert. Es zeigt sich ebenfalls, dass im Gegensatz zu einigen Literaturergebnissen die Swirl-Rate alleine kein ausreichendes Kriterium für die Stabilität eines Wirbels in reibungsfreien kompressiblen Strömungen darstellt.

Vergleiche des für kompressible Strömungen erweiterten Hall-Modells mit den durchgeführten Simulationen zeigen eine qualitative Übereinstimmung für eine Simulationsreihe mit einem Wake-Profil ( $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_{\infty}$ ). Im Vergleich mit den anderen Simulationsreihen unterschätzt das aufgestellte Modell allerdings das Abbremsen der axialen Geschwindigkeit entlang der Rotationsachse. Angesichts dessen scheint eine Verfeinerung der getroffenen Annahmen notwendig.

Die exemplarische Betrachtung der Interaktion zweier Wirbel zeigt eine Vielzahl von unterschiedlichen Einflüssen. Bei hinreichend kleinem Abstand der Wirbel kann entweder der Aufplatzpunkt stromabwärts verschoben werden, oder ein Aufplatzen im Simulationsgebiet komplett verhindert werden. Um ein besseres Verständnis der komplexen Interaktionen zu entwickeln, ist hier noch weitere Forschung notwendig.

## Literatur

- [1] <https://www.centaursoft.com>. CENTAUR Software Homepage.
- [2] *Technical Documentation of the DLR TAU-Code Release 2019.1.0*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., 2019.
- [3] W. Althaus, Ch. Brücker, and M. Weimer. Breakdown of slender vortices. In *Fluid Vortices*, pages 373–426. Springer, 1995.
- [4] G. K. Batchelor. Axial flow in trailing line vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 20(4):645–658, 1964.
- [5] T. B. Benjamin. Theory of the vortex breakdown phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(4):593–629, 1962.
- [6] M. J. Bhagwat and J. G. Leishman. Generalized viscous vortex model for application to free-vortex wake and aeroacoustic calculations. *Annual forum proceedings – American helicopter society*, 58(2):2042–2057, 2002.
- [7] P. Billant, J.-M. Chomaz, and P. Huerre. Experimental study of vortex breakdown in swirling jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 376:183–219, 1998.
- [8] M. Breuer and D. Hänel. Solution of the 3-d, incompressible navier-stokes equations for the simulation of vortex breakdown. pages 42–51, 1990.
- [9] D. Darmofal. The role of vorticity dynamics in vortex breakdown. *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*, page 3036, 1993.
- [10] G. Erlebacher, M. Y. Hussaini, and C.-W. Shu. Interaction of a shock with a longitudinal vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 337:129–153, 1997.
- [11] M. Escudier. Vortex breakdown: observations and explanations. *Progress in Aerospace Sciences*, 25(2):189–229, 1988.
- [12] M. P. Escudier and J. J. Keller. Vortex breakdown: a two-stage transition. Technical report, Brown Boveri Research Center Baden (Switzerland), 1983.
- [13] J. H. Faler and S. Leibovich. An experimental map of the internal structure of a vortex breakdown. *Journal of Fluid Mechanics*, 86(2):313–335, 1978.
- [14] A. K. Garg and S. Leibovich. Spectral characteristics of vortex breakdown flowfields. *The Physics of Fluids*, 22(11):2053–2064, 1979.
- [15] M. G. Hall. Vortex breakdown. *Annual review of fluid mechanics*, 4(1):195–218, 1972.
- [16] J. Han, Y.-L. Lin, D. G. Schowalter, S. P. Arya, and F. H. Proctor. Large eddy simulation of aircraft wake vortices within homogeneous turbulence - crow instability. *AIAA Journal*, 38(2):292–300, 2000.
- [17] J. K. Harvey. Some observations of the vortex breakdown phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(4):585–592, 1962.
- [18] S. Hitzel. Wing vortex-flows up into vortex breakdown – a numerical simulation. *6th Applied Aerodynamics Conference*, page 2518, 1988.
- [19] L. N. Howard and A. S. Gupta. On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(3):463–476, 1962.
- [20] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285:69–94, 1995.
- [21] E. Krause. Vortex breakdown – physical issue and computational simulation. In *International Congress of Fluid Mechanics, 3rd, Cairo, Egypt*, pages 335–344, 1990.

- [22] N. C. Lambourne. The breakdown of certain types of vortex. *ARC CP*, (915), 1967.
- [23] N. C. Lambourne and D. W. Bryer. The bursting of leading-edge vortices – some observations and discussion of the phenomenon. *Aeronautical Research Center R. & M.*, 3282:1–36, 1962.
- [24] S. Leibovich. The structure of vortex breakdown. *Annual review of fluid mechanics*, 10(1):221–246, 1978.
- [25] O. Lucca-Negro and T. O’Doherty. Vortex breakdown: a review. *Progress in energy and combustion science*, 27(4):431–481, 2001.
- [26] J. M. Luckring. The discovery and prediction of vortex flow aerodynamics. *The Aeronautical Journal*, 123(1264):729–804, 2019.
- [27] J. M. Luckring and D. Hummel. What was learned from the new vfe-2 experiments. *Aerospace Science and Technology*, 24(1):77–88, 2013.
- [28] H Ludwig. Vortex breakdown. *DFVLR, Forschungsbericht Luft-/Raumfahrt*, 70:40, 1970.
- [29] R Melville. The role of compressibility in free vortex breakdown. In *Fluid Dynamics Conference*, page 2075, 1996.
- [30] D. H. Peckham and S. A. Atkinson. Preliminary results of low speed wind tunnel tests on a gothic wing of aspect ratio 1.0. *ARC CP*, (508), 1957.
- [31] F. Proctor. Numerical simulation of wake vortices measured during the idaho falls and memphis field programs. *14th Applied Aerodynamics Conference*, (96):2496, 1996.
- [32] J. D. Randall and S. Leibovich. The critical state: a trapped wave model of vortex breakdown. *Journal of Fluid Mechanics*, 58(3):495–515, 1973.
- [33] Lord Rayleigh. *On the dynamics of revolving fluids*, volume 6. Cambridge University Press, 1916.
- [34] Martin Rein. *Einführung in die Strömungsmechanik*. Universitätsverlag Göttingen, 2020.
- [35] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2):357–372, 1981.
- [36] T. Sarpkaya. On stationary and travelling vortex breakdowns. *Journal of Fluid Mechanics*, 45(3):545–559, 1971.
- [37] T. Sarpkaya. Vortex breakdown in swirling conical flows. *AIAA Journal*, 9(9):1792–1799, 1971.
- [38] R. E. Spall and T. B. Gatski. A numerical simulation of vortex breakdown. *Forum on Unsteady Flow Separation*, pages 25–33, 1987.
- [39] R. E. Spall and T. B. Gatski. A computational study of the taxonomy of vortex breakdown. In *21st Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*, page 1624, 1990.
- [40] R. E. Spall and T. B. Gatski. A computational study of the topology of vortex breakdown. *Proceedings of the Royal Society London*, 435:321–337, 1991.
- [41] R. E. Spall, T. B. Gatski, and C. E. Grosch. A criterion for vortex breakdown. *The Physics of fluids*, 30(11):3434–3440, 1987.
- [42] H. B. Squire. *Analysis of the Vortex Breakdown Phenomenon, Part I*. Imperial College of Science and Technology, Aeronautics Department, 1960.

# Appendix

## A Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten

Die Komponenten der Euler-Gleichung in Zylinderkoordinaten haben die folgende Form [34]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_r &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\phi^2}{r} \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_\phi &= -\frac{1}{r\varrho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_x &= -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}\tag{52}$$

Die Kontinuitätsgleichung nimmt die folgende Form an:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\varrho u_\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\varrho u_x) = 0\tag{53}$$

## B Herleitung einer Identität für die Ableitung des Drucks

In isentropen Strömungen gilt für zwei Punkte  $x$  und  $x_0$  auf der gleichen Stromlinie:

$$\frac{\varrho(x_0)}{\varrho(x)} = \left( \frac{p(x_0)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Damit erhält man für die partielle Ableitung nach  $x$  die folgende Identität:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho(x)} \frac{\partial p(x)}{\partial x} &= \frac{1}{\varrho(x_0)} \left( \frac{p(x_0)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{p^{1/\gamma}(x_0)}{\varrho(x_0)} p^{-\frac{1}{\gamma}} \frac{\partial p(x)}{\partial x} \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p^{1/\gamma}(x_0)}{\varrho(x_0)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(x) \right] \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{p^{1/\gamma}(x_0)}{\varrho(x_0)} p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(x) \right] \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\varrho(x_0)} \left( \frac{p(x_0)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{\gamma}} p(x) \right] \\ &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{p(x)}{\varrho(x)} \right]\end{aligned}\tag{54}$$



## C Herleitung der verwendeten Definition des Batchelor-Wirbels

In der in dieser Arbeit verwendeten Definition des Batchelor-Wirbels taucht eine Konstante  $\xi$  auf, die hier hergeleitet wird.

Sei der Batchelor-Wirbel zunächst konventionell über die Gesamtzirkulation  $\Gamma$  definiert:

$$u_\phi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \quad (55)$$

Damit gilt für das Maximum der Azimutalgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{2r}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left[ -1 + \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2r^2}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (56)$$

$$\iff 1 = \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{2r^2}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (57)$$

$$\iff \exp\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = 1 + 2 \frac{r^2}{R^2} \quad (58)$$

Numerisch ergibt sich  $r_{\max} \approx 1,1209064227783332 R$  und damit:

$$u_{\phi \max} = \left[ \frac{\Gamma}{2\pi r_{\max}} \left( 1 - \exp\left(-\frac{r_{\max}^2}{R^2}\right) \right) \right] = \frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot \xi \quad (59)$$

mit  $\xi \approx 0,6381726863389516$ . Substitution von  $\Gamma$  in Gleichung 55 ergibt schließlich:

$$u_\phi(r) = \frac{u_{\phi \max} R}{\xi r} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \quad (60)$$

Auf diese Weise kann die maximale Azimutalgeschwindigkeit und damit auch die Swirl-Rate direkt eingestellt werden.

## D Analytische Berechnung des konvektiven Terms der Euler-Gleichung bei mehreren Wirbeln

Die axiale und azimutale Geschwindigkeit eines Batchelor-Wirbels sind definiert als:

$$u_x(r) = u_\infty + \Delta u_{x \max} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (61)$$

$$u_\phi(r) = \frac{u_{\phi \max}}{\xi} \frac{R}{r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right)\right] \quad (62)$$

mit einer Konstanten  $\xi \approx 0,63817$  (vgl. Anhang C). Umgerechnet auf kartesische Koordinaten erhält man:

$$u_y = -\sin(\phi) u_\phi = -\frac{z}{r} u_\phi \quad (63)$$

$$u_z = \cos(\phi) u_\phi = \frac{y}{r} u_\phi \quad (64)$$

Bei mehreren Wirbeln  $j$  mit Mittelpunkten  $(y_M^{(j)}, z_M^{(j)})$  erhält man damit für das Geschwindigkeitsfeld:

$$u_x = u_{x,\infty} + \sum_j \left[ u_x(r^{(j)}) - u_{x,\infty} \right] \quad (65)$$

$$u_y = \sum_j -\frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi(r^{(j)}) \quad (66)$$

$$u_z = \sum_j \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi(r^{(j)}) \quad (67)$$

Für die Berechnung des Drucks wird aber der quadratische Term der substantiellen Zeitableitung benötigt. Für diesen gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= \left( \sum_j \vec{u}^{(j)} \cdot \vec{\nabla} \right) \sum_k \vec{u}^{(k)} = \left( \sum_j u_y^{(j)} \partial_y + \sum_j u_z^{(j)} \partial_z \right) \sum_k \vec{u}^{(k)} \\ &= \left( \sum_j u_y^{(j)} \right) \left( \sum_k \partial_y \vec{u}^{(k)} \right) + \left( \sum_j u_z^{(j)} \right) \left( \sum_k \partial_z \vec{u}^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (68)$$

Es können also zunächst die Geschwindigkeitskomponenten und Ableitungen für jeden Wirbel aufsummiert werden, um dann miteinander multipliziert zu werden.

Für die Berechnung des Drucks werden die räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten benötigt,  $u_x$  und  $u_\phi$  hängen aber nur vom jeweiligen Radius ab. Es gilt:

$$\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial r^{(j)}} = -2 \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)} r^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi^{(j)}}{\partial r^{(j)}} &= -\frac{u_{\phi \max}^{(j)} R^{(j)}}{\xi r^{(j)2}} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right)\right) + 2 \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \\ &= -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + 2 \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \end{aligned} \quad (70)$$

Die partielle Ableitungen der Radien in  $y$ - und  $z$ -Richtung folgen direkt aus der Definition:

$$\frac{\partial r^{(j)}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\left(y - y_M^{(j)}\right)^2 + \left(z - z_M^{(j)}\right)^2} = \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \quad (71)$$

$$\frac{\partial r^{(j)}}{\partial z} = \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \quad (72)$$

Für die Ableitung in  $x$ -Richtung sind nur die Positionen  $(y_M, z_M)$  der Wirbelmitte von Bedeutung. Deren Bewegung folgt aus der Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder der einzelnen Wirbel:

$$\begin{aligned} y_M(x_0 + \delta x) &= y_M(x_0) + u_y(x_0, y_M, z_M) \cdot \delta t \\ &= y_M(x_0) + u_y(x_0, y_M, z_M) \cdot \frac{\delta x}{u_x(x_0, y_M, z_M)} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y_M^{(j)}}{\partial x} = \frac{y_M(x_0 + \delta x) - y_M(x_0)}{\delta x} = \frac{u_y}{u_x} \Big|_{x_0, y_M, z_M} \quad (74)$$

$$\text{analog: } \frac{\partial z_M^{(j)}}{\partial x} = \frac{u_z}{u_x} \Big|_{x_0, y_M, z_M} \quad (75)$$

Und damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial x} &= \frac{\partial r^{(j)}}{\partial y_M^{(j)}} \frac{\partial y_M^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial r^{(j)}}{\partial z_M^{(j)}} \frac{\partial z_M^{(j)}}{\partial x} \\ &= - \left( \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{u_y}{u_x} \Big|_{x_0, y_M^{(j)}, z_M^{(j)}} + \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{u_z}{u_x} \Big|_{x_0, y_M^{(j)}, z_M^{(j)}} \right) \\ &= -2 \frac{(y - y_M^{(j)}) (z - z_M^{(j)})}{r^{(j)2}} \frac{u_\phi}{u_x} \Big|_{x_0, y_M^{(j)}, z_M^{(j)}} \\ &= -\sin(2\phi^{(j)}) \frac{u_\phi}{u_x} \Big|_{x_0, y_M^{(j)}, z_M^{(j)}} \end{aligned} \quad (76)$$

Beachte, dass der Quotient der Geschwindigkeiten sich auf die Gesamtgeschwindigkeiten, also die Summe über alle Wirbel, bezieht. Er wird dann allerdings in den Koordinaten der Wirbelkerne ausgewertet. Im folgenden wird der Quotient als  $I_y^{(j)}$  bzw.  $I_z^{(j)}$  abgekürzt.

Damit können jetzt alle neun Ableitungen berechnet werden. Für  $u_x$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \sum_j \frac{\partial u_x}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial x} \\ &= \sum_j -2 \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)} r^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \left( -\frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_y^{(j)} - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_z^{(j)} \right) \\ &= \sum_j 2 \left[ (y - y_M^{(j)}) I_y^{(j)} + (z - z_M^{(j)}) I_z^{(j)} \right] \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial y} &= \sum_j \frac{\partial u_x}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial y} = \sum_j -2 \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)} r^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \\ &= \sum_j -2 (y - y_M^{(j)}) \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \end{aligned} \quad (78)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \sum_j \frac{\partial u_x}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial z} = \sum_j -2 (z - z_M^{(j)}) \frac{\Delta u_{x \max}^{(j)}}{R^{(j)2}} \exp\left(-\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}}\right) \quad (79)$$

Für  $u_y$  gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_y}{\partial x} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi^{(j)} \right] \\
&= \sum_j \left[ \left( -\frac{\partial}{\partial y_M^{(j)}} \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) \frac{\partial y_M^{(j)}}{\partial x} u_\phi^{(j)} - \left( \frac{\partial}{\partial z_M^{(j)}} \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) \frac{\partial z_M^{(j)}}{\partial x} u_\phi^{(j)} - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{\partial u_\phi^{(j)}}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial x} \right] \\
&= \sum_j \left[ -\frac{(y - y_M^{(j)})(z - z_M^{(j)})}{r^{(j)3}} I_y^{(j)} u_\phi^{(j)} - \left( -\frac{1}{r^{(j)}} + \frac{(z - z_M^{(j)})^2}{r^{(j)3}} \right) I_z^{(j)} u_\phi^{(j)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \left[ -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + 2 \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \left( -\frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_y^{(j)} - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_z^{(j)} \right) \right] \\
&= \sum_j -I_y^{(j)} \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + 2 \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)2}} \left[ (y - y_M^{(j)}) I_y^{(j)} + (z - z_M^{(j)}) I_z^{(j)} \right] \left[ -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_y}{\partial y} &= \sum_j \frac{\partial u_y}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial y} = \sum_j -2 \frac{(y - y_M^{(j)})(z - z_M^{(j)})}{r^{(j)2}} \left[ -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_y}{\partial z} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi^{(j)} \right] = \sum_j \left[ -\left( \frac{\partial}{\partial z} \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) u_\phi^{(j)} - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{\partial u_\phi^{(j)}}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial z} \right] \\
&= \sum_j -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} - 2 \frac{(z - z_M^{(j)})^2}{r^{(j)2}} \left[ -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (82)
\end{aligned}$$

Für  $u_z$  gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial x} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi^{(j)} \right] \\
&= \sum_j \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y_M^{(j)}} \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) \frac{\partial y_M^{(j)}}{\partial x} u_\phi^{(j)} + \left( \frac{\partial}{\partial z_M^{(j)}} \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) \frac{\partial z_M^{(j)}}{\partial x} u_\phi^{(j)} + \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{\partial u_\phi^{(j)}}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial x} \right] \\
&= \sum_j \left[ \left( -\frac{1}{r^{(j)}} + \frac{(y - y_M^{(j)})^2}{r^{(j)3}} \right) I_y^{(j)} u_\phi^{(j)} + \frac{(y - y_M^{(j)})(z - z_M^{(j)})}{r^{(j)3}} I_z^{(j)} u_\phi^{(j)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \left[ -\frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + 2 \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \left( -\frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_y^{(j)} - \frac{z - z_M^{(j)}}{r^{(j)}} I_z^{(j)} \right) \right] \\
&= \sum_j -I_y^{(j)} \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} + 2 \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)2}} \left[ (y - y_M^{(j)}) I_y^{(j)} + (z - z_M^{(j)}) I_z^{(j)} \right] \left[ \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} - \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial y} &= \sum_j \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} u_\phi^{(j)} \right] = \sum_j \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \right) u_\phi^{(j)} + \frac{y - y_M^{(j)}}{r^{(j)}} \frac{\partial u_\phi^{(j)}}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial y} \right] \\
&= \sum_j \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} - 2 \frac{(y - y_M^{(j)})^2}{r^{(j)2}} \left[ \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} - \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (84)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= \sum_j \frac{\partial u_z}{\partial r^{(j)}} \frac{\partial r^{(j)}}{\partial z} = \sum_j -2 \frac{(y - y_M^{(j)})(z - z_M^{(j)})}{r^{(j)2}} \left[ \frac{u_\phi^{(j)}}{r^{(j)}} - \frac{u_{\phi \max}^{(j)}}{\xi R^{(j)}} \exp \left( -\frac{r^{(j)2}}{R^{(j)2}} \right) \right] \quad (85)
\end{aligned}$$

## E Übersicht über die dieser Arbeit zu Grunde liegenden Simulationen

Hier sind alle Simulationen mit ihren Parametern aufgelistet, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt und ausgewertet wurden.

Simulation	$\Delta u_{x \max} / u_{\infty}$	$u_{\phi \max} / u_{\infty}$	$s$	Abstand / $R$
Referenzrechnung ohne Wirbel	0	0	0	-
ein Batchelor-Wirbel	-0,2	0,16	0,2	-
ein Batchelor-Wirbel	-0,2	0,24	0,3	-
ein Batchelor-Wirbel	-0,2	0,36	0,4	-
ein Batchelor-Wirbel	-0,2	0,40	0,5	-
ein Batchelor-Wirbel	0	0,3	0,3	-
ein Batchelor-Wirbel	0	0,4	0,4	-
ein Batchelor-Wirbel	0	0,5	0,5	-
ein Batchelor-Wirbel	0	0,6	0,6	-
ein Batchelor-Wirbel	0,2	0,6	0,5	-
ein Batchelor-Wirbel	0,2	0,72	0,6	-
ein Batchelor-Wirbel	0,2	0,84	0,7	-
ein Erlebacher-Wirbel	-0,4	0,3	0,5	-
ein Erlebacher-Wirbel	-0,2	0,24	0,3	-
ein Erlebacher-Wirbel	-0,2	0,4	0,5	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,2	0,2	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,3	0,3	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,4	0,4	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,5	0,5	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,6	0,6	-
ein Erlebacher-Wirbel	0	0,7	0,7	-
ein Erlebacher-Wirbel	0,2	0,6	0,5	-
ein Erlebacher-Wirbel	0,4	0,7	0,5	-
zwei Erlebacher-Wirbel				5
Wirbel 1	-0,2	0,24	0,3	
Wirbel 2	0	-0,3	-0,3	
zwei Erlebacher-Wirbel				5
Wirbel 1	-0,2	0,24	0,3	
Wirbel 2	0	0,3	0,3	
zwei Erlebacher-Wirbel				7
Wirbel 1	-0,2	0,24	0,3	
Wirbel 2	0	-0,3	-0,3	
zwei Erlebacher-Wirbel				7
Wirbel 1	-0,2	0,24	0,3	
Wirbel 2	0	0,3	0,3	

Tabelle 3: Übersicht über die durchgeführten Simulationen.

Simulation	$\Delta u_{x \max} / u_{\infty}$	$u_{\phi \max} / u_{\infty}$	$s$	Abstand / $R$
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,4	0,4	
Wirbel 2	0	-0,2	-0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,4	0,4	
Wirbel 2	0	0,2	0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,5	0,5	
Wirbel 2	0	-0,2	-0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,5	0,5	
Wirbel 2	0	0,2	0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,6	0,6	
Wirbel 2	0	-0,2	-0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				3
Wirbel 1	0	0,6	0,6	
Wirbel 2	0	0,2	0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				5
Wirbel 1	0	0,5	0,5	
Wirbel 2	0	-0,2	-0,2	
zwei Batchelor-Wirbel				5
Wirbel 1	0	0,5	0,5	
Wirbel 2	0	0,2	0,2	

Tabelle 4: Übersicht über die durchgeführten Simulationen (fortgesetzt).

## F Zusätzliches Bildmaterial

Hier finden sich Abbildungen, die für die Auswertung der Simulationsergebnisse verwendet wurden, aber im Haupttext keinen Platz gefunden haben.

### F.1 Einzelne Erlebacher-Wirbel

In Kapitel 7.1 werden experimentelle Daten aus der Literatur mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation eines Batchelor-Wirbels verglichen. Analog dazu sind hier Abbildungen für einen Erlebacher-Wirbel mit den gleichen Wirbelparametern ( $R = 0,4 \text{ m}$ ,  $\Delta u_{x \max} = 0$ ,  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$ ) aufgeführt.

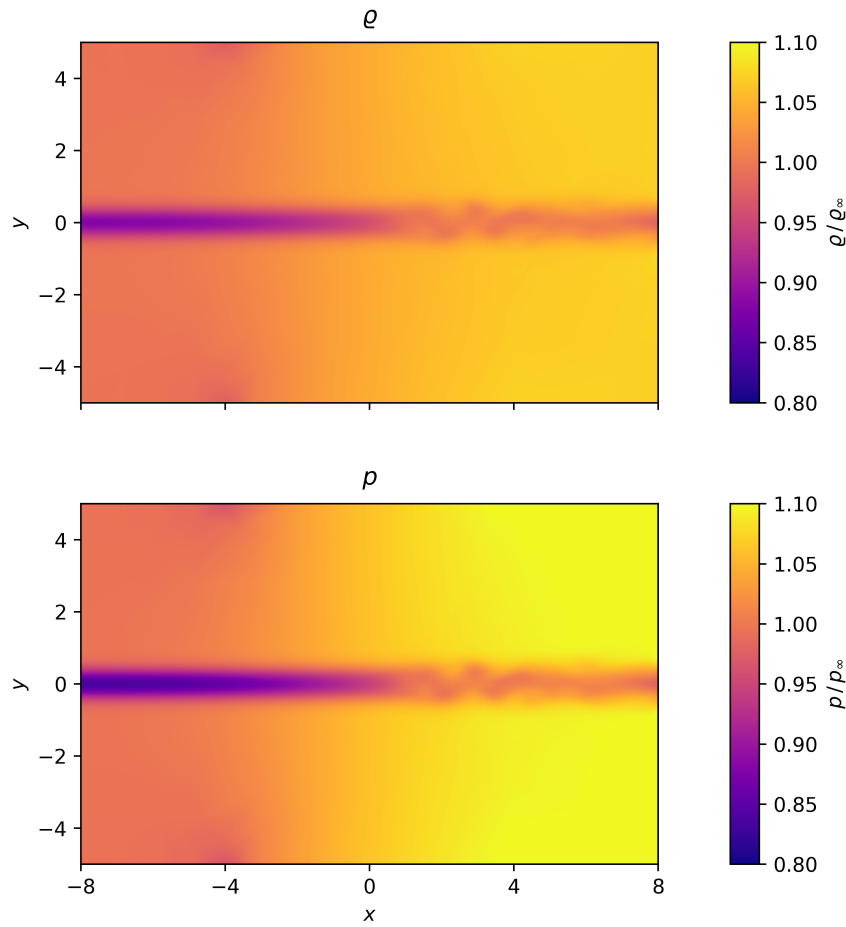


Abbildung 37: Die Dichte und der Druck eines Erlebacher-Wirbels mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0$ ,  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  in einem Schnitt durch das Strömungsfeld bei  $z = 0$ .

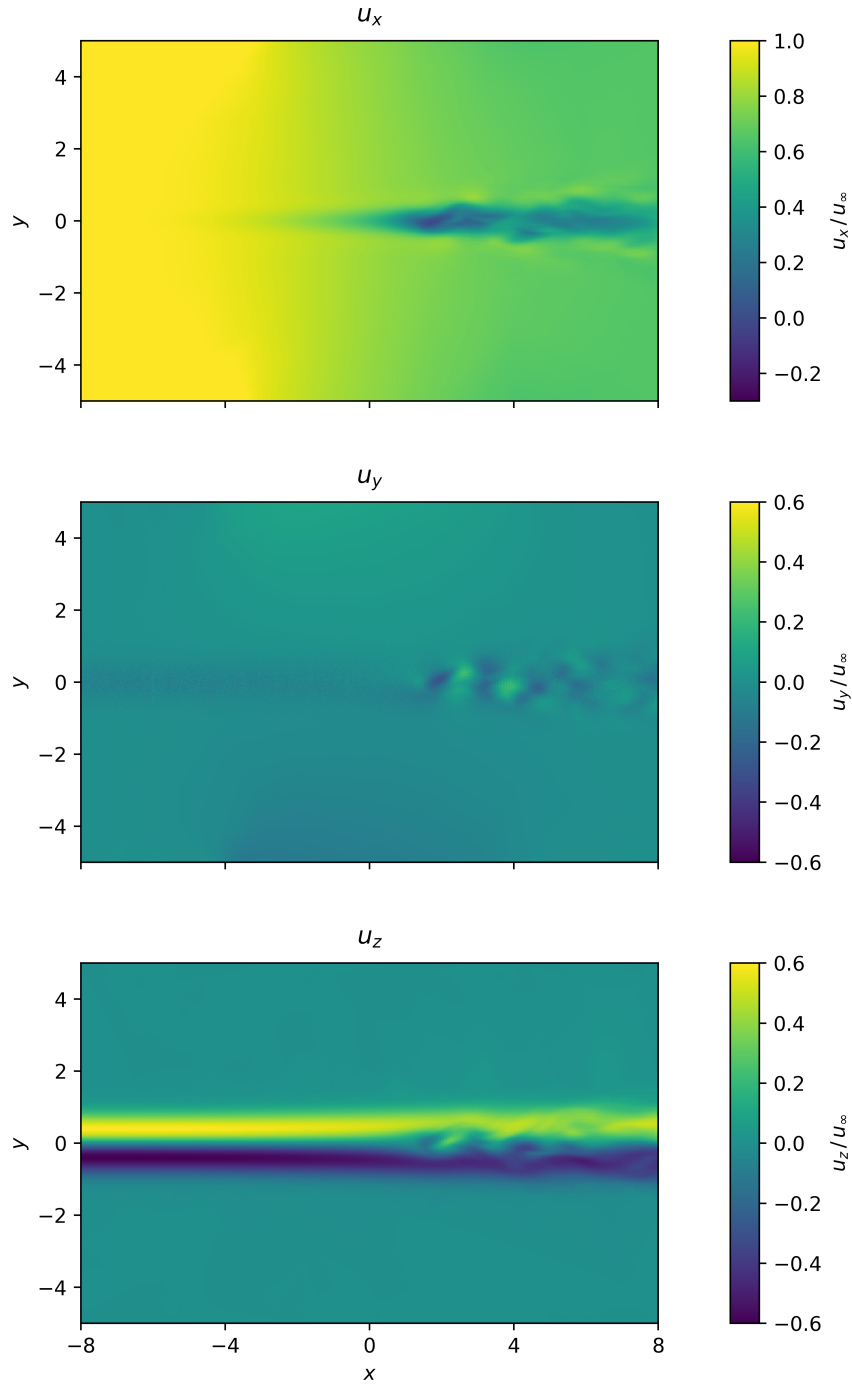


Abbildung 38: Die Geschwindigkeitskomponenten eines Erlebacher-Wirbels mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0$ ,  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  in einem Schnitt durch das Strömungsfeld bei  $z = 0$ .

Insgesamt fällt die Aufweitung des Wirbels schwächer aus als bei einem Batchelor-Wirbel mit den gleichen Wirbelparametern (siehe Abbildung 39), es ist aber ebenfalls ein Aufplatzen nach dem Spiraltyp zu beobachten und die Spirale besitzt die gleiche Windungsrichtung.



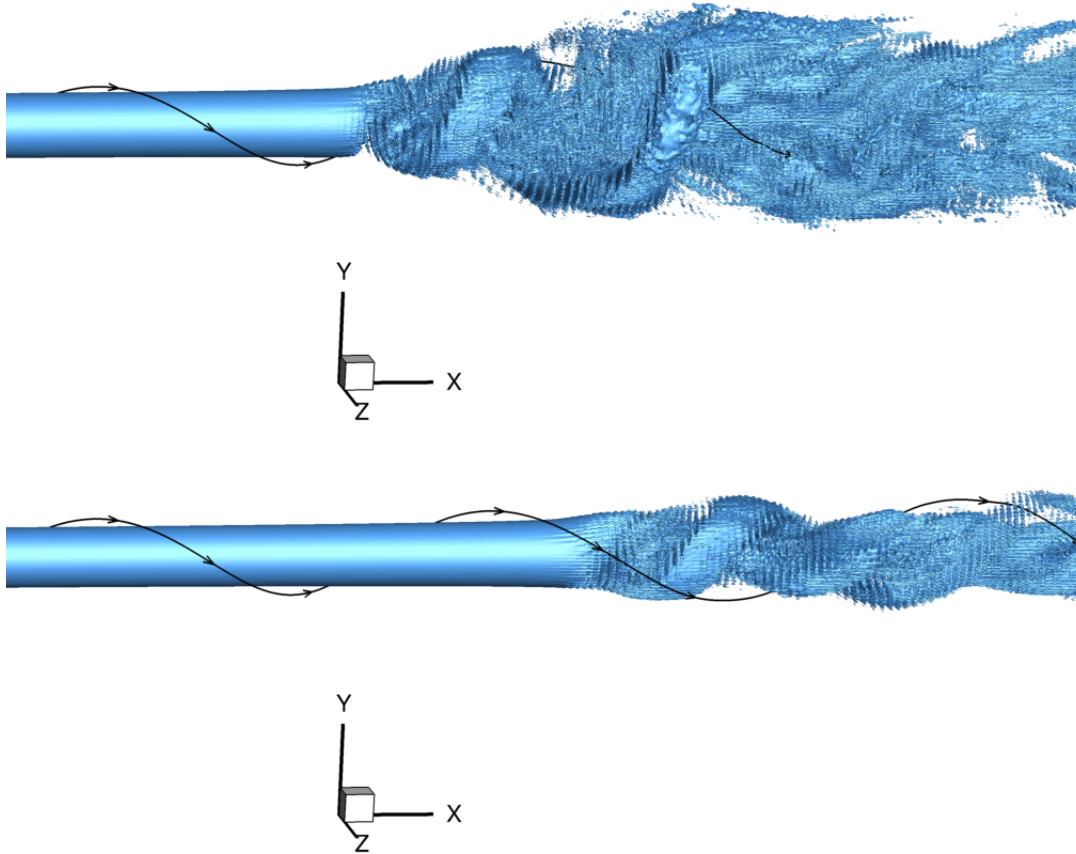


Abbildung 39: Das Aufplatzen eines Batchelor-Wirbels (oben) und eines Erlebacher-Wirbels (unten) jeweils mit Parametern  $u_{\phi \max} = 0,6 u_{\infty}$  und  $\Delta u_{x \max} = 0$ ; dargestellt durch eine blau eingefärbte  $\lambda_2$ -Isofläche. Die Rotationsrichtung des Wirbels wird in beiden Fällen mit einer einzelnen Stromlinie sichtbar gemacht. Es ist zu beobachten, dass sich bei beiden Wirbeltypen hinter dem Aufplatzpunkt eine Spirale mit gegenläufigem Drehsinn ausbildet. Der obere Teil der Abbildung entspricht Abbildung 20 im Hauptteil der Arbeit. (Erstellt mit Tecplot 360)

## F.2 Stabilitätsbetrachtungen für Erlebacher Wirbel

Analog zu den Stabilitätsbetrachtungen in Kapitel 7.2 wurden auch einige Simulationen mit einem einzelnen Erlebacher-Wirbel mithilfe von Schnitten durch die ( $z=0$ )-Ebene analysiert. Die Ergebnisse werden im Folgenden abgebildet.

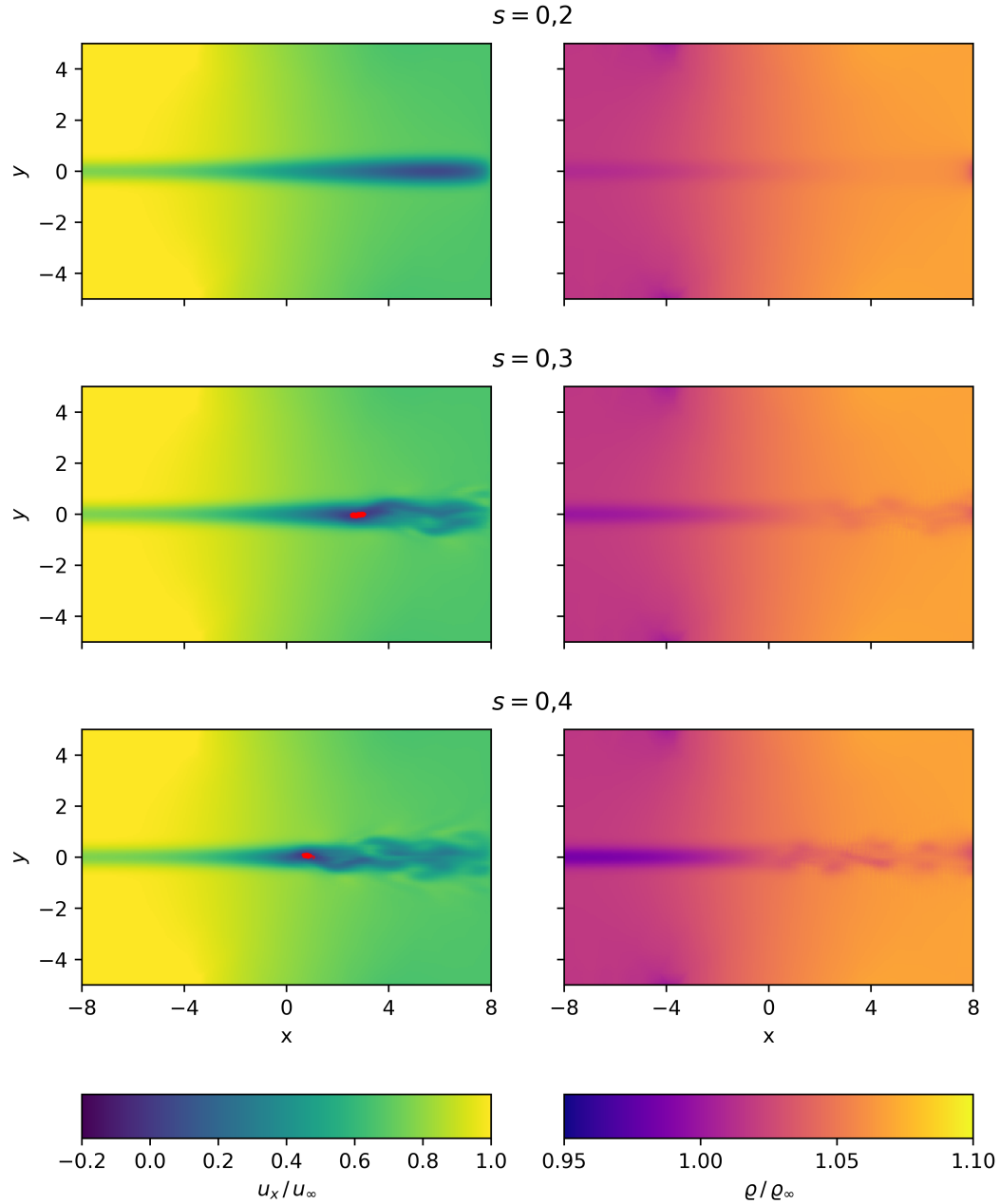


Abbildung 40: Schnitte durch die ( $z=0$ )-Ebene für drei Erlebacher-Wirbel mit Abweichung der axialen Geschwindigkeit im Wirbelkern von der axialen Umgebungströmung  $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_\infty$  („Wake“-Profil) und unterschiedlichen Swirl-Raten  $s$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$ , rechts die Dichte  $\rho$  abgebildet. In der linken Spalte ist der Bereich mit  $u_x \leq 0$  m/s rot umrandet, sofern vorhanden.

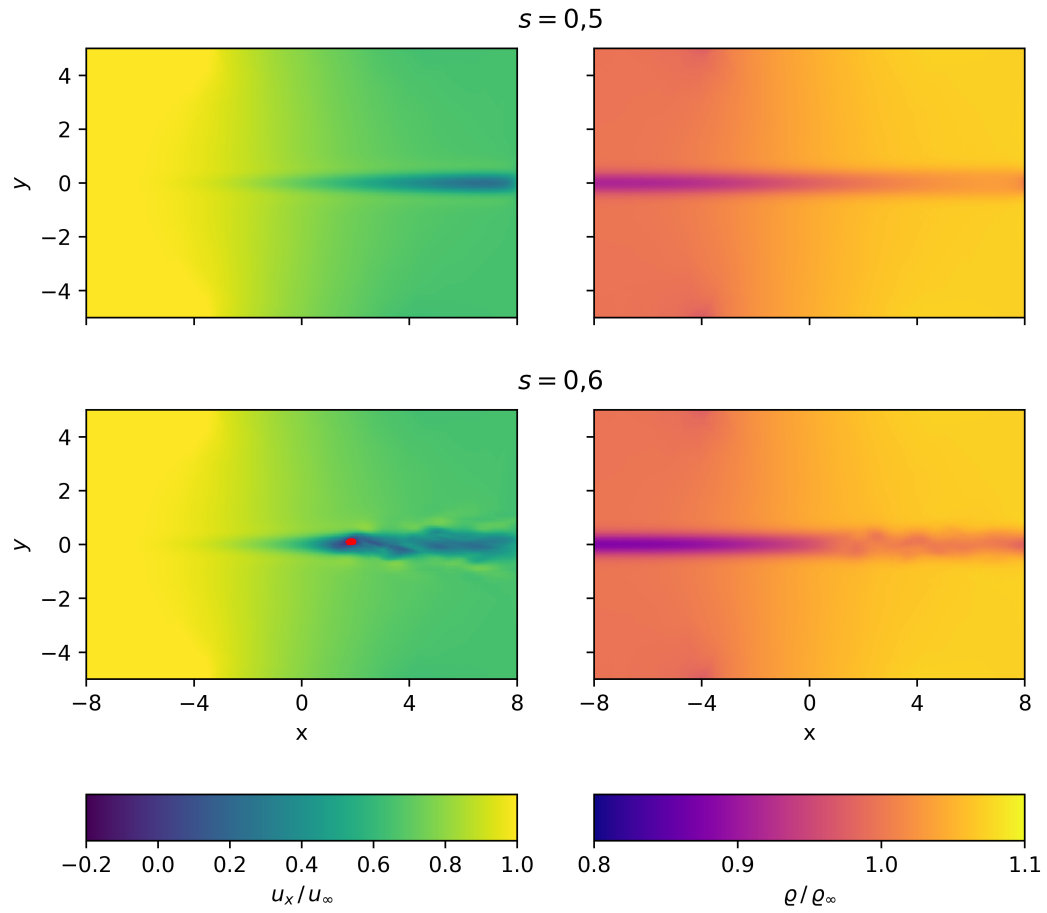
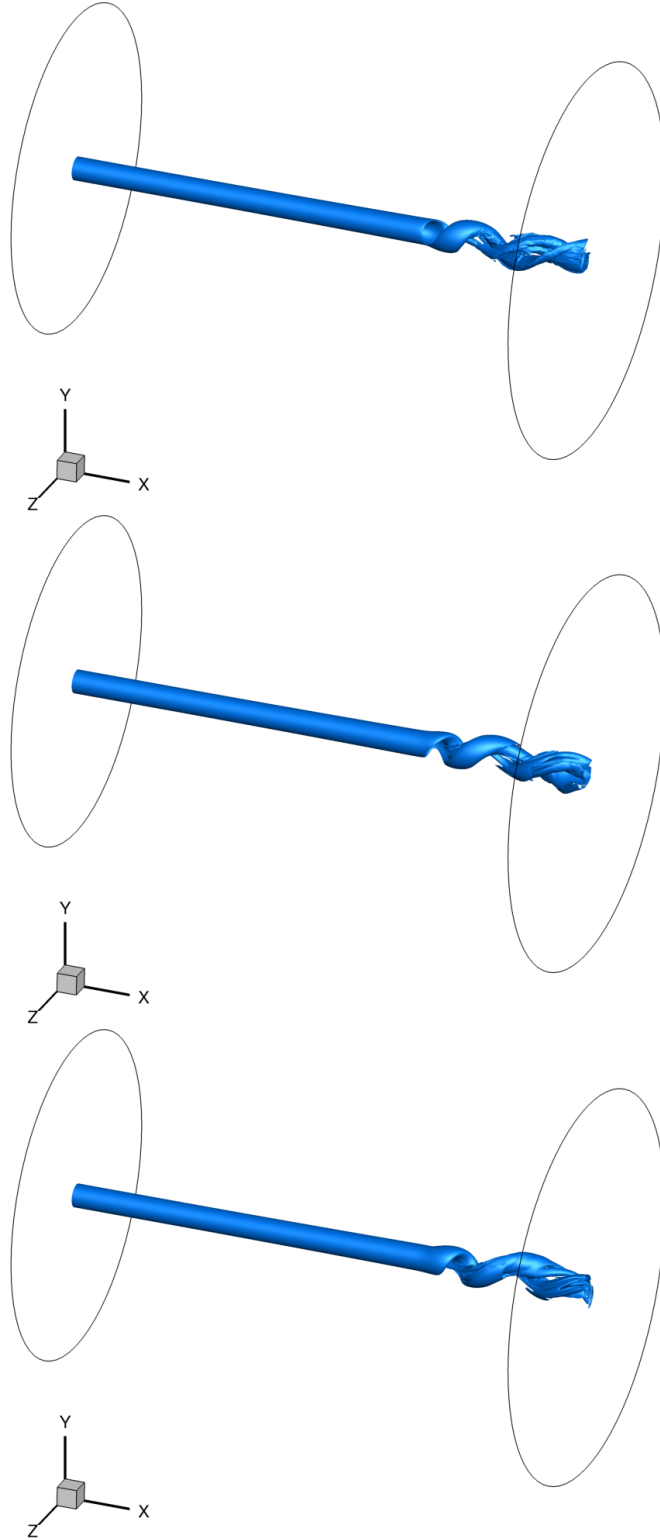


Abbildung 41: Schnitte durch die ( $z=0$ )-Ebene für zwei Erlebacher-Wirbel ohne Abweichung der axialen Geschwindigkeit im Wirbelkern von der axialen Umgebungströmung ( $\Delta u_{x \max} = 0$ , m/s) und unterschiedlichen Swirl-Raten  $s$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$ , rechts die Dichte  $\rho$  abgebildet. In der linken Spalte ist der Bereich mit  $u_x \leq 0$  m/s rot umrandet, sofern vorhanden.

### F.3 Zeitliche Entwicklung eines Spiralplatzens

Bei geeigneter Wahl der Parameter zeigt der in die Simulationsumgebung eingebrachte Wirbel ein typisches Aufplatzen analog des in Kapitel 4.1 aufgeführten Spiral-Typs. Die zeitliche Entwicklung für einem Batchelor-Wirbel mit den Parametern  $s = 0,5$ ,  $\Delta u_{x \max} = 0$  ist in der folgenden Abbildung 42 für sechs unterschiedliche Zeiten ( $\Delta t = 0,01$  s) dargestellt.



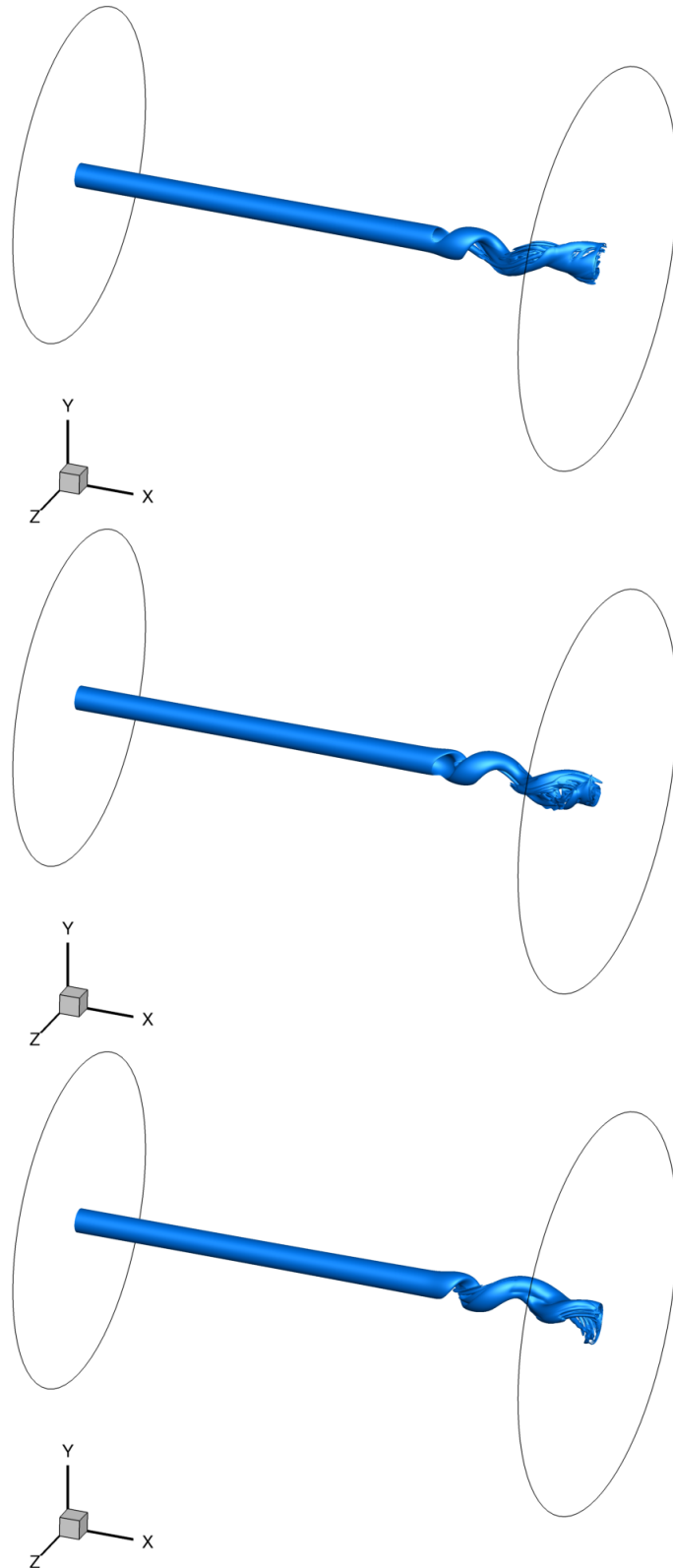


Abbildung 42: Sechs Schnappschüsse aus einer Simulation mit einem Batchelor-Wirbel mit den Parameter sind  $s = 0,5$ ,  $\Delta u_{x \max} = 0$ . In blau sind  $\lambda_2$ -Isoflächen mit einem Wert von lediglich -2000 abgebildet. Der Wirbel platzt nach dem Spiraltyp auf. Zwischen den Schnappschüssen liegt jeweils ein Zeitintervall von 0,01 s (Erstellt mit Tecplot 360.)

#### F.4 Schnitte senkrecht zu $x$ -Achse für Batchelor-Wirbel

Zur näheren Untersuchung des Aufplatzverhaltens und Kontrolle der in Kapitel F.2 angefertigten Schnitte parallel zur  $x$ -Achse wurden auch einige Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse angefertigt. Im Folgenden sind für die aufplatzenden Batchelor-Wirbel aus Kapitel F.2 jeweils drei Schnitte dargestellt: Einer am Einlass ( $x = x_0$ ), einer in einem Abstand von  $2R$  stromaufwärts des Aufplatzpunkts ( $x = x_p - R$ ) und einer am Aufplatzpunkt ( $x = x_p$ ).

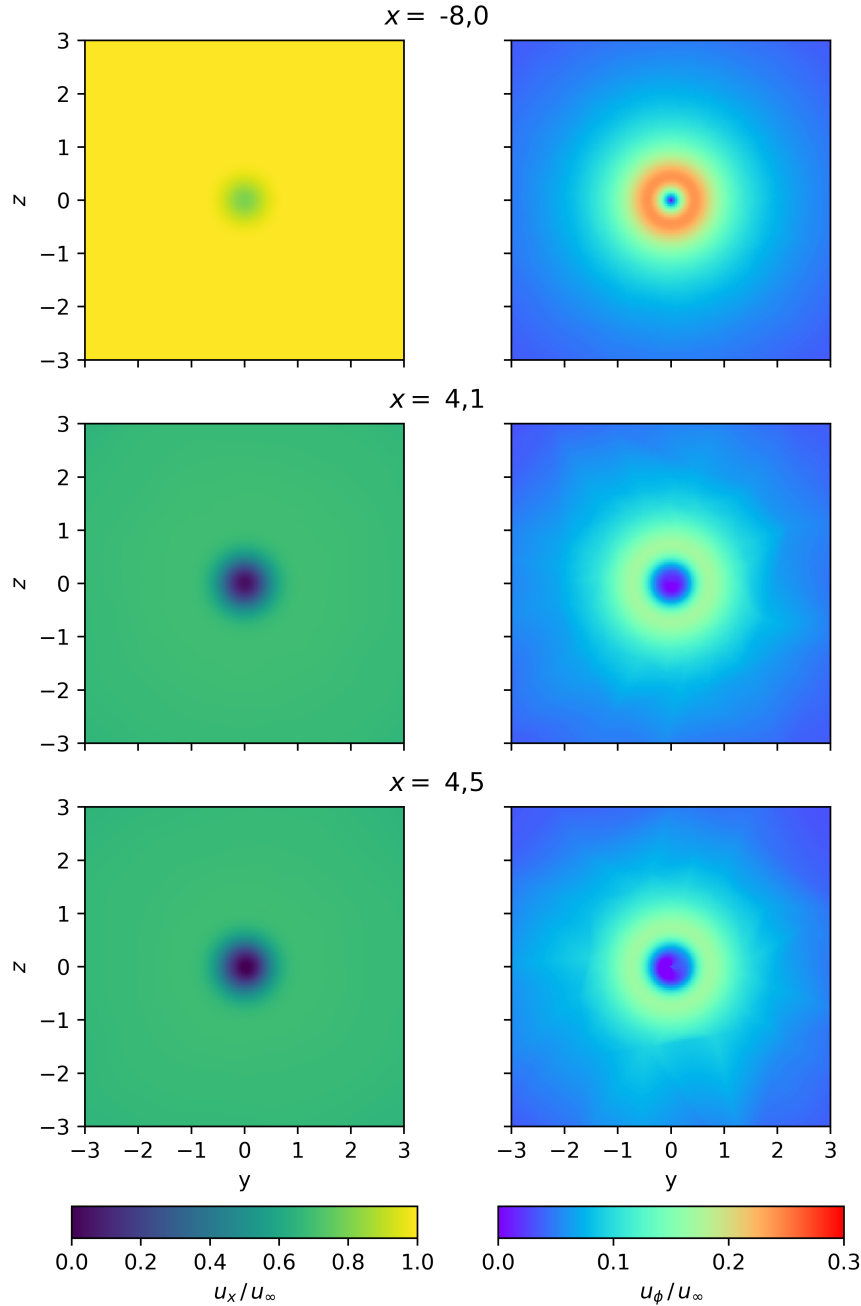


Abbildung 43: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_\infty$  und  $s = 0,3$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimutale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $R$  stromaufwärts des Aufplatzpunkts. Unten: Am Aufplatzpunkt.

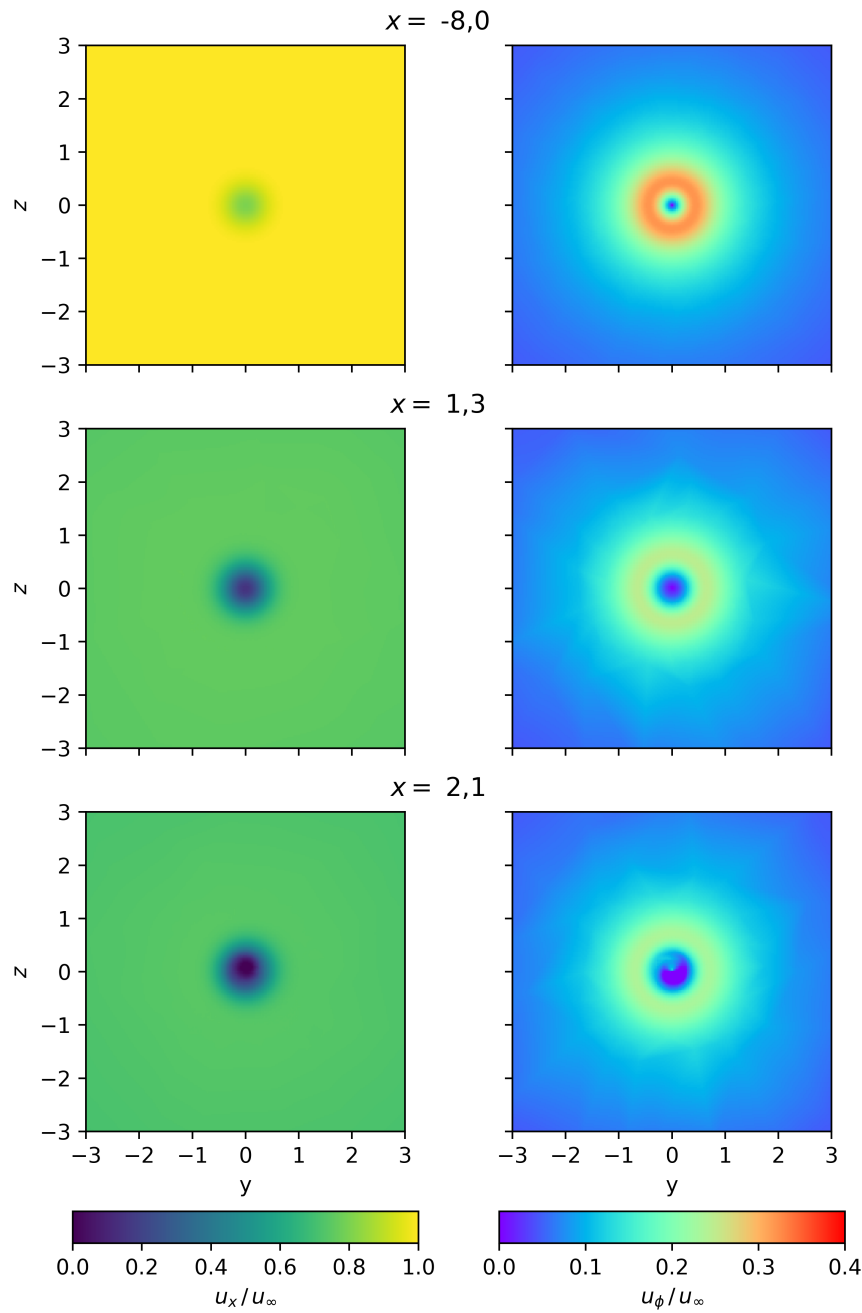


Abbildung 44: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = -0,2 u_\infty$  und  $s = 0,4$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimutale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $2 R$  stromaufwärts des Aufplatzens. Unten: Am Aufplatzen.

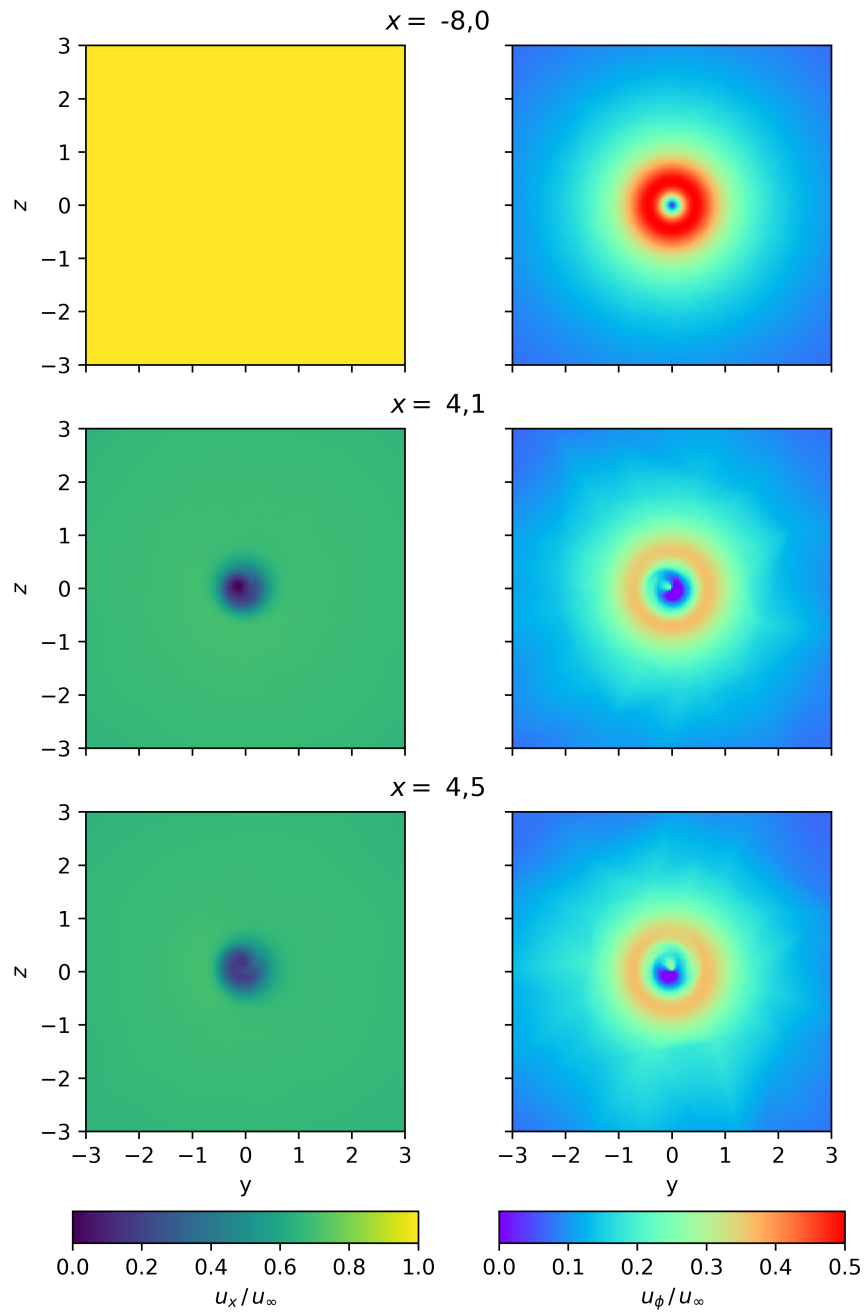


Abbildung 45: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0 \text{ m/s}$  und  $s = 0.5$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimuthale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $R$  stromaufwärts des Aufplatzens. Unten: Am Aufplatzen.



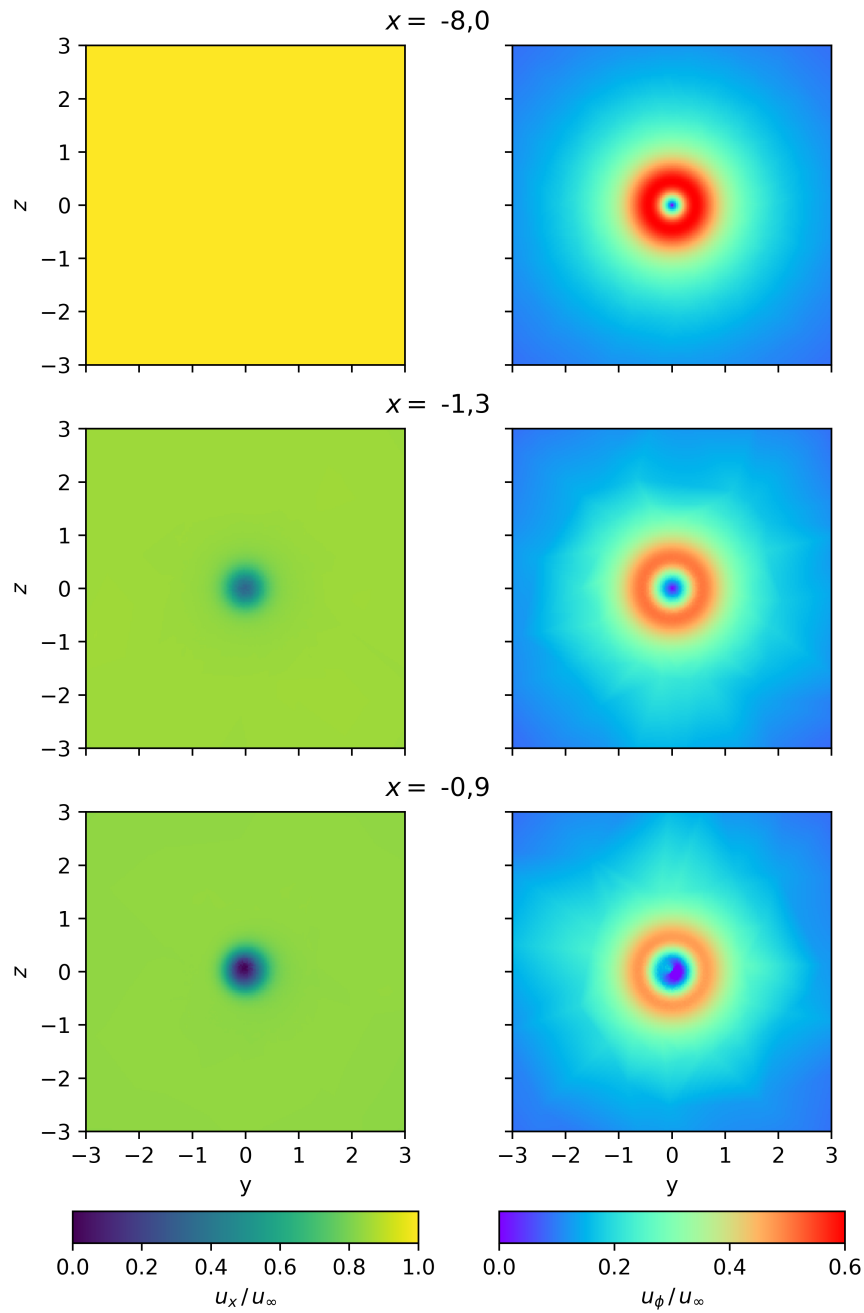


Abbildung 46: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0 \text{ m/s}$  und  $s = 0,6$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimuthale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $R$  stromaufwärts des Aufplatzens. Unten: Am Aufplatzen.

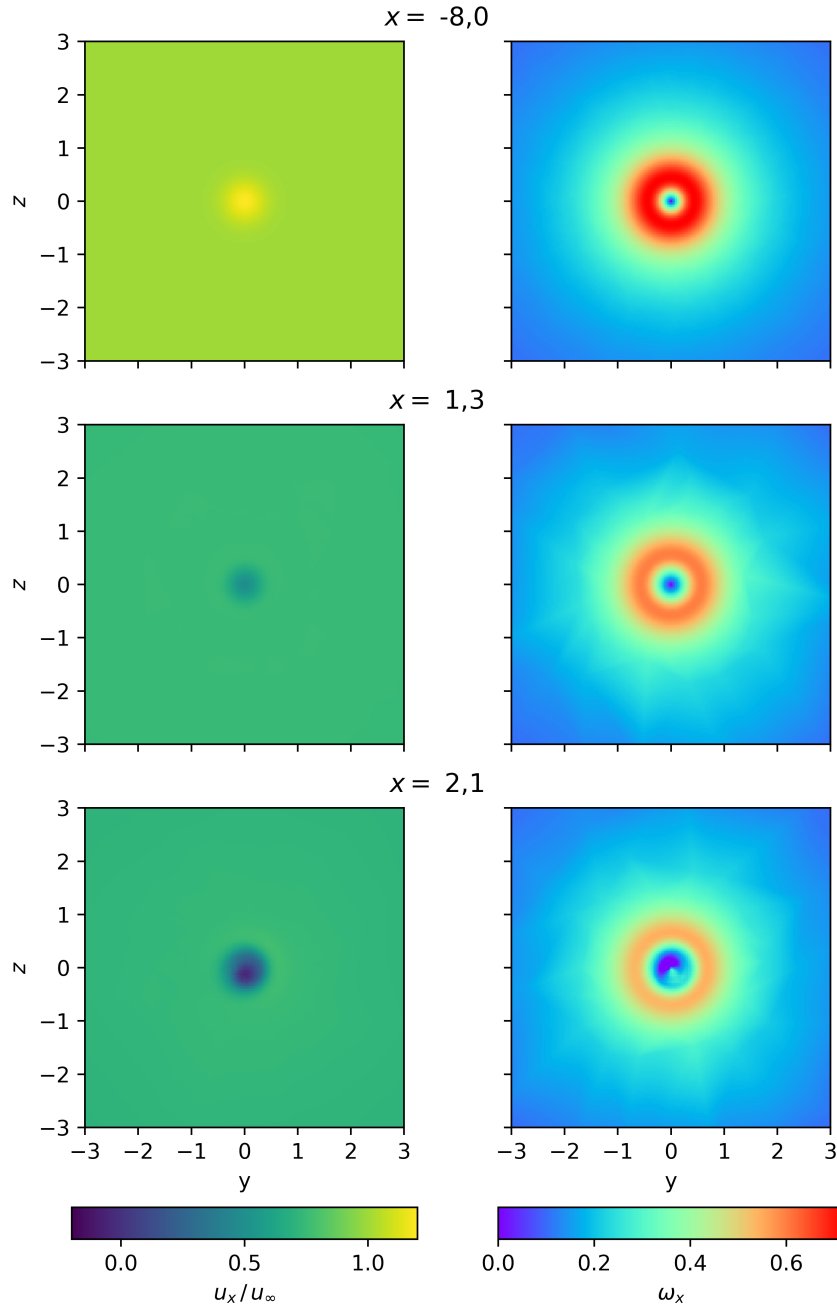


Abbildung 47: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0,2 u_\infty$  und  $s = 0,6$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimuthale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $2 R$  stromaufwärts des Aufplatzpunkts. Unten: Am Aufplatzpunkt.

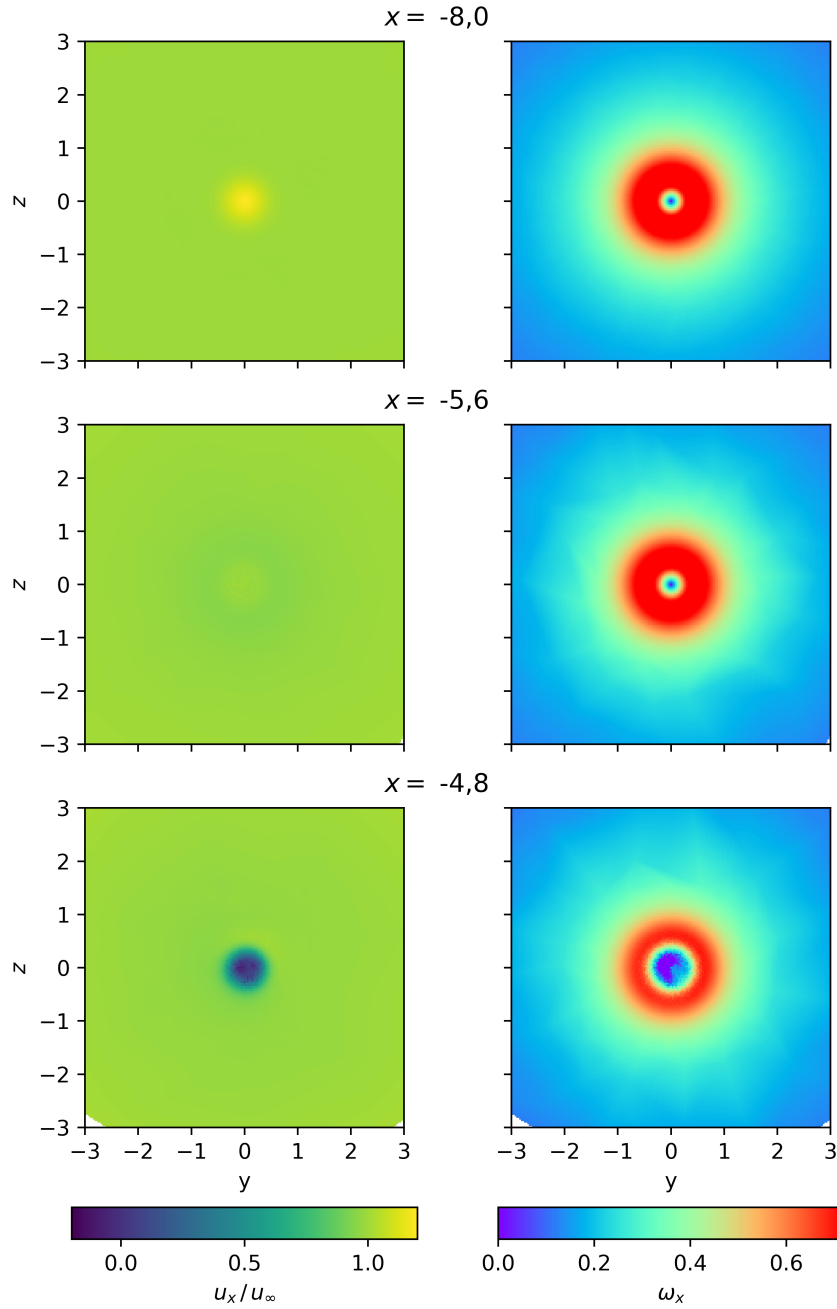


Abbildung 48: Drei Schnitte in der  $y$ - $z$ -Ebene für einen Batchelor-Wirbel mit Wirbelparametern  $\Delta u_{x \max} = 0,2 u_\infty$  und  $s = 0,7$ . Links ist die axiale Geschwindigkeit  $u_x$  dargestellt, rechts die azimuthale Geschwindigkeit  $u_\phi$ . Oben: am Einlass. Mitte: Im Abstand von  $2 R$  stromaufwärts des Aufplatzzpunkts. Unten: Am Aufplatzzpunkt.

## F.5 Weitere Stromlinienbilder von der Interaktion zweier Wirbel

Zur Untersuchung der Interaktion zweier Batchelor-Wirbel werden auch Simulationen durchgeführt, in denen der Hauptwirbel eine Swirl-Rate von  $s = 0,4$  oder  $s = 0,6$  hat. Im ersten Fall tritt im Simulationsgebiet überhaupt kein Wirbelplatzen auf. Im zweiten Fall wird es durch den Steuerwirbel nur unwesentlich beeinflusst.

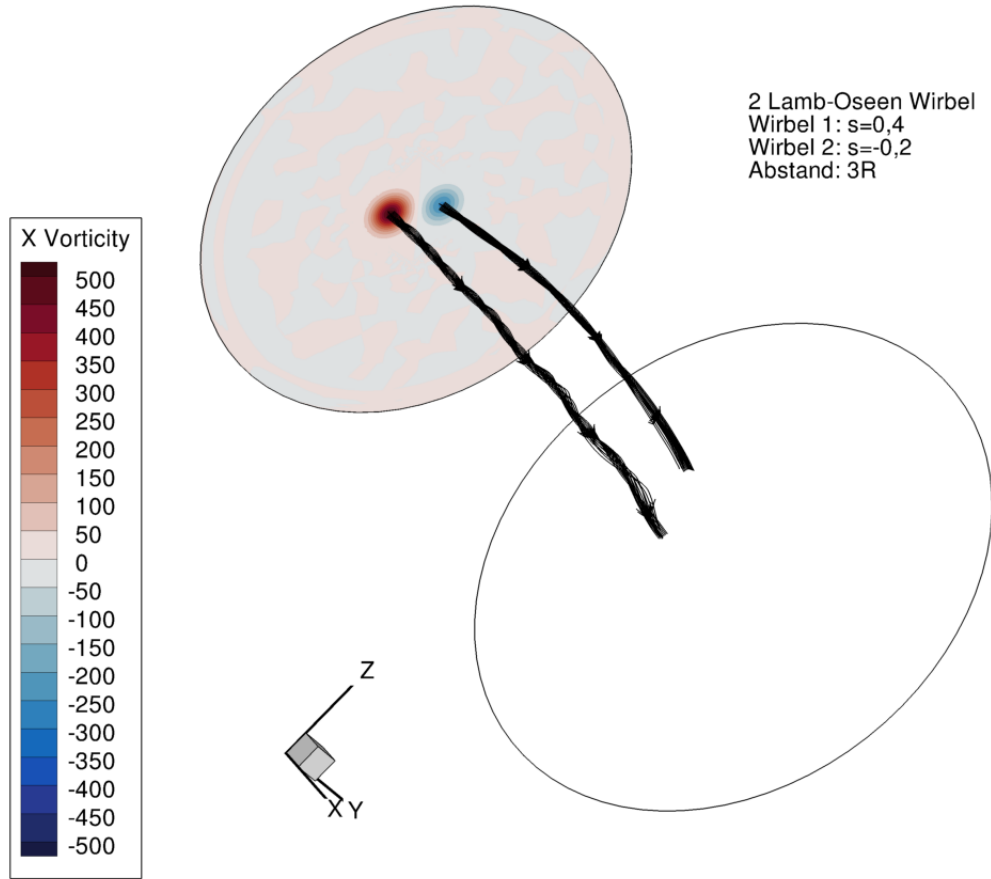


Abbildung 49: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,4$  und  $s_2 = -0,2$ . Weder Hauptwirbel (am Einlass links) noch Steuerwirbel (am Einlass rechts) platzen im Simulationsgebiet auf.

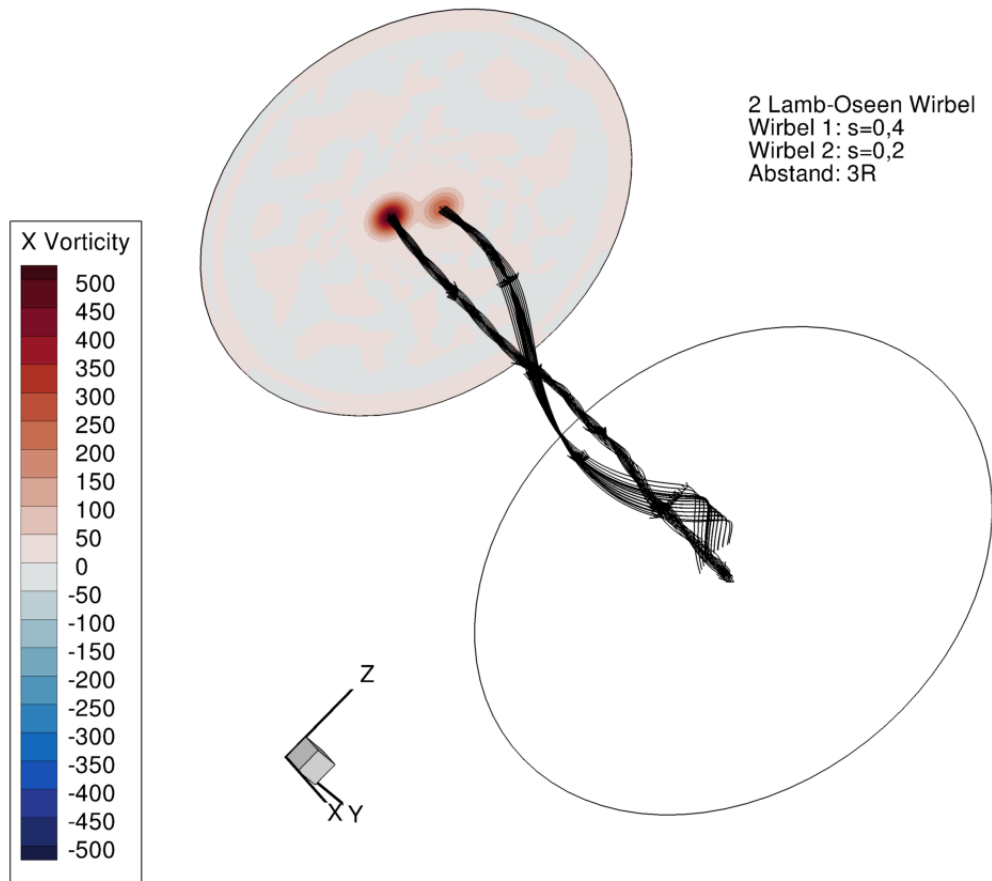


Abbildung 50: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,4$  und  $s_2 = 0,2$ . Der Steuerwirbel (am Einlass rechts) wickelt sich vollständig um den Hauptwirbel (am Einlass links), dennoch platzt der Hauptwirbel im Simulationsgebiet nicht auf.

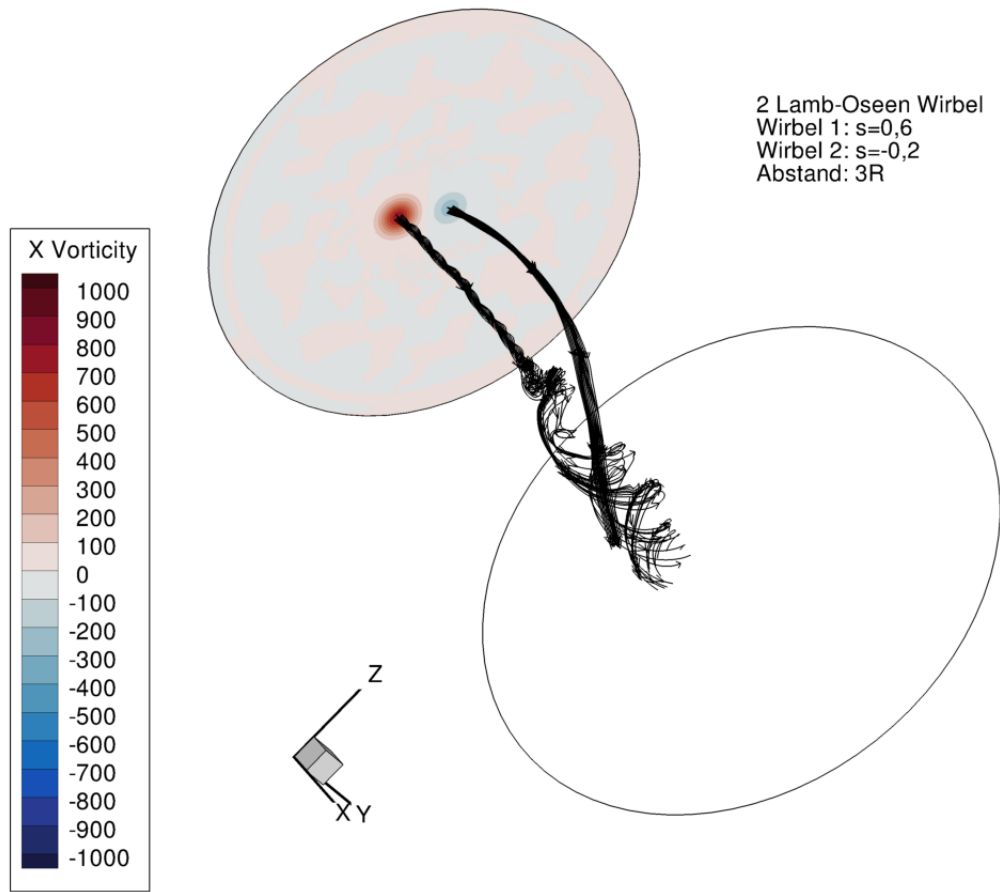


Abbildung 51: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,6$  und  $s_2 = -0,2$ . Der Hauptwirbel (am Einlass links) platzt nach dem Spiraltyp auf und die Überreste des Wirbels wickeln sich hinter dem Aufplatzpunkt um den Steuerwirbel (am Einlass rechts). Der Aufplatzpunkt des Hauptwirbels verschiebt sich gegenüber einer Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel um einen Kernradius stromabwärts.

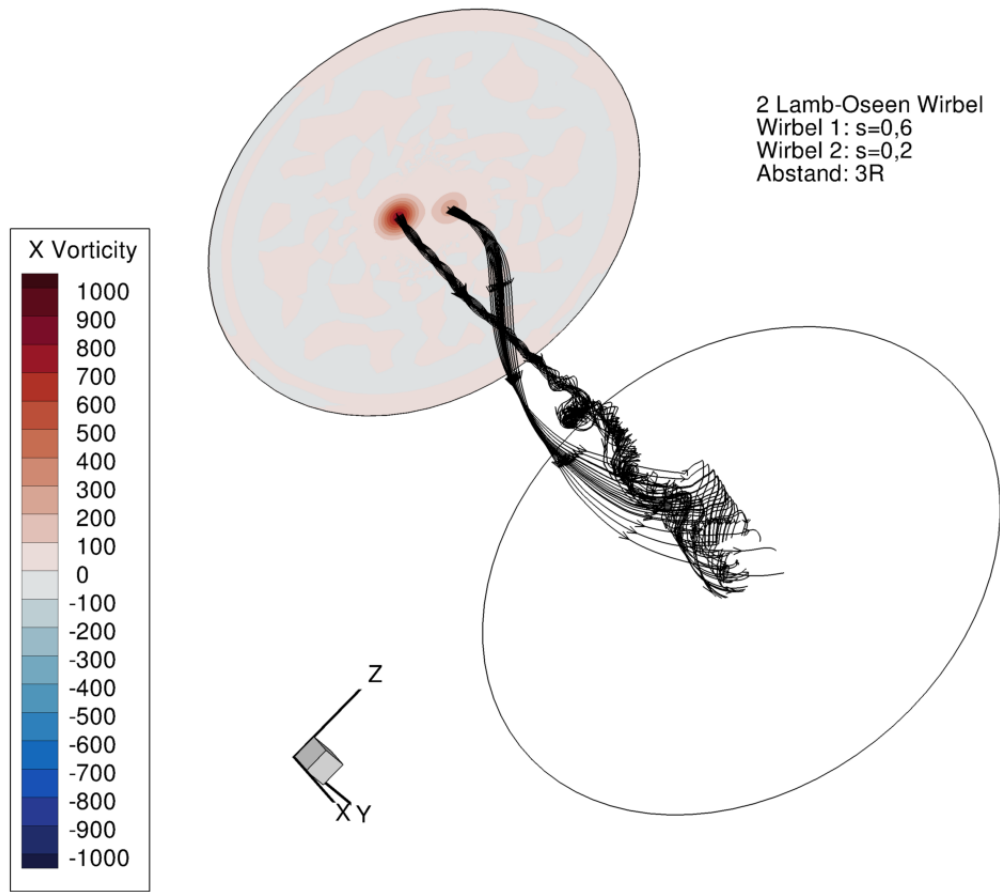


Abbildung 52: Stromlinien-Bündel in den Wirbelkernen zweier gleichsinniger Batchelor-Wirbel im Abstand  $3R$ , mit Swirl-Raten  $s_1 = 0,6$  und  $s_2 = 0,2$ . Der Steuerwirbel (am Einlass rechts) wickelt sich vollständig um den Hauptwirbel (am Einlass links). Das Aufplatzen des Hauptwirbels verschiebt sich gegenüber einer Simulation mit nur einem einzelnen Wirbel um eineinhalb Kernradien stromabwärts.

## Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Martin Rein bedanken, ohne dessen zahlreiche Anregungen und viele hilfreiche Gespräche meine Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr. Andreas Dillmann bedanken, dessen Aerodynamik-Vorlesung mein Interesse für die Strömungsmechanik geweckt hat, und der freundlicherweise das Zweitgutachten übernimmt.

Mein Dank gilt auch Herrn Michael Werner, der mir die komplexe Welt des TAU-Codes näher gebracht und mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden hat.

Schließlich möchte ich mich bei der Abteilung Hochgeschwindigkeitskonfigurationen des DLRs und insbesondere bei Herrn Dr. Kai Richter bedanken, die mich überaus freundlich aufgenommen haben.